2M - Mathématiques Nom : .

Travail Ecrit - Dérivées

Donner un maximum de détails dans toutes vos réponses.

Calculatrice et Formulaire et tables autorisés.

Durée 2 périodes

Exercice 1 : Effectuer la dérivée en 5 étapes $\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x)-f(x)}{\Delta_x}$ pour la fonction $f(x) = (x+1)^2$ $= x^2 + 2x + 1$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 1 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 1$

$f(x+\Delta x) - f(x) = \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{2x} + 2\Delta x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{1}$

$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x = \Delta x(2x + \Delta x + 2)$

$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + \Delta x + 2$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 2) = 2x + 2$

2M - Mathématiques Nom : ....

Exercice 2 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 - 7x)^5$

$f'(x) = 5(x^2 - 7x)^4 \cdot (2x - 7)$

2) $g(x) = (x^3 + 2)(2x^2 + 5)$

$g'(x) = (3x^2)(2x^2+5) + (x^3+2)(4x) =$

$= 6x^4 + 15x^2 + 4x^4 + 8x =$

$= 10x^4 + 15x^2 + 8x.$

Exercice 3 : 1) Etablir le tableau de signe ainsi que le tableau de croissance de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$. Que peut-on en déduire sur le graphe de cette fonction en $x = 1$?

1) $D_f = \mathbb{R}$

$\underline{\underline{TS}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = -1 \Leftrightarrow x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0.$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

$\underline{\underline{TCr}}$ $f'(x) = \left((x-1)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ $x \neq 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	$\|\|$	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$

la fonction n'est pas dérivable en $x=1$ et on a un tangente verticale

2M - Mathématiques Nom : ....

Exercice 4 : Etudier la fonction $f(x) = \frac{3x^2+x+4}{x^2+1}$

1) Donner le domaine de définition de la fonction f.
2) Donner les équations des asymptotes s'il y en a, ainsi que le comportement asymptotique.
3) Faire le tableau de signe de la fonction f.
4) Faire le tableau de croissance de la fonction f.
5) Calculer l'équation de la tangente au graphe au point $x = 0$.
6) Esquissez la fonction à l'aide des points précédents.

1) $x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2) AV $\emptyset$ AO/AH $y = \frac{3}{1} \Rightarrow$ AH : $y = 3$

$f(x) = 3 + \frac{x+1}{x^2+1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0^-$

$+\infty \quad f(x) > 3 \qquad -\infty ;\ f(x) < 3$

3) TS $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+x+4 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4\cdot3\cdot4 < 0 \Rightarrow 3x^2+x+4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$+$	

4) $f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - (3x^2+x+4)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3+6x+x^2+1-6x^3-2x^2-8x}{(x^2+1)^2}$

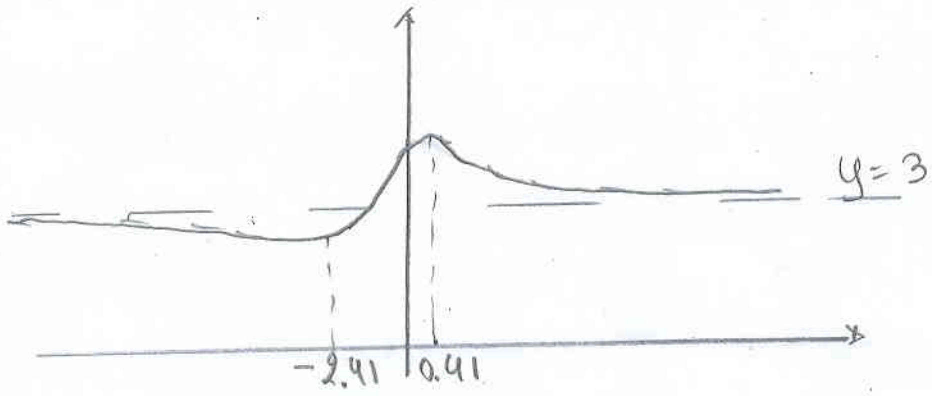
$= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+1 = 0 \qquad \Delta = 8 \qquad x_1 = 0{,}41 \quad x_2 = -2.41$

x	$-\infty$		-2.41		0.41		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	Min $(-2.41 ; 2.79)$	↗	Max $(0.41 ; 4.2)$	↘	

5) $x = 0 \quad f(0) = 4 \quad f'(0) = 1 = m$

$y = mx + b$

$4 = 1\cdot0 + b \Rightarrow b = 4$ $\Big\}$ $t : y = x + 4$



Exercice 5 : Cocher la bonne réponse sans justification.

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+9x+20}$ a une asymptote non verticale ?

- ✓ Oui
- ○ Non

2) $g(x) = \frac{x^2+9x+20}{x-1}$ a une asymptote verticale ?

- ✓ Oui
- ○ Non

3) $h(x) = \frac{x^3-5x^2+x-9}{x^2-4x+2}$ a une asymptote horizontale ?

- ○ Oui
- ✓ Non

4) $l(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-7)(x+3)}$ a combien d'asymptotes ?

- ○ 0
- ○ 1
- ○ 2
- ○ 3
- ✓ 4

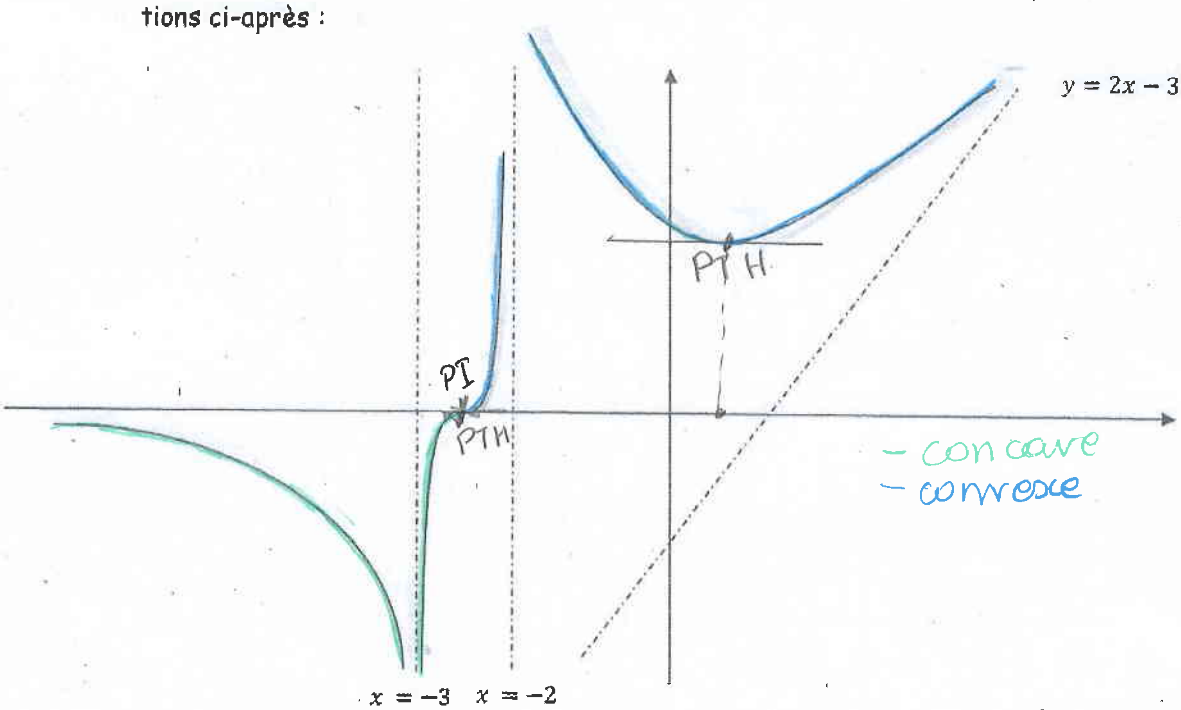
5) $i(x) = \frac{1}{x^2}$ a un comportement au voisinage de son asymptote verticale qui ressemble à :

6) $k(x) = \frac{(x-2)(x-7)(x+3)}{(x-1)}$ a une asymptote non verticale ?

- ○ Oui
- ✓ Non

2M - Mathématiques Nom : ....

Exercice 6. : En observant le graphe de la fonction f ci-dessous répondre aux questions ci-après :



1) Quel est le domaine de définition ~~de~~ la fonction f ? $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; -2\}$

2) Y-a-t'il des asymptotes ? Si oui donner leurs équations. AV : $x = -3$; $x = -2$
AO : $y = 2x - 3$ AH : $y = 0$

3) Y a-t'il un changement de courbure ? Montrer en couleurs différentes les parties convexes et les parties concaves.

4) Y a-t'il un point d'inflexion ? Si oui le montrer.

5) Montrer le ou les PTH.

6) La pente de la tangente en $x = -2.5$ sera positive ou négative ? 0

7) $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 2^+$

8) $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0^-$

9) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

10) $\lim_{x \to -3^-} f'(x) = -\infty$

11) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$