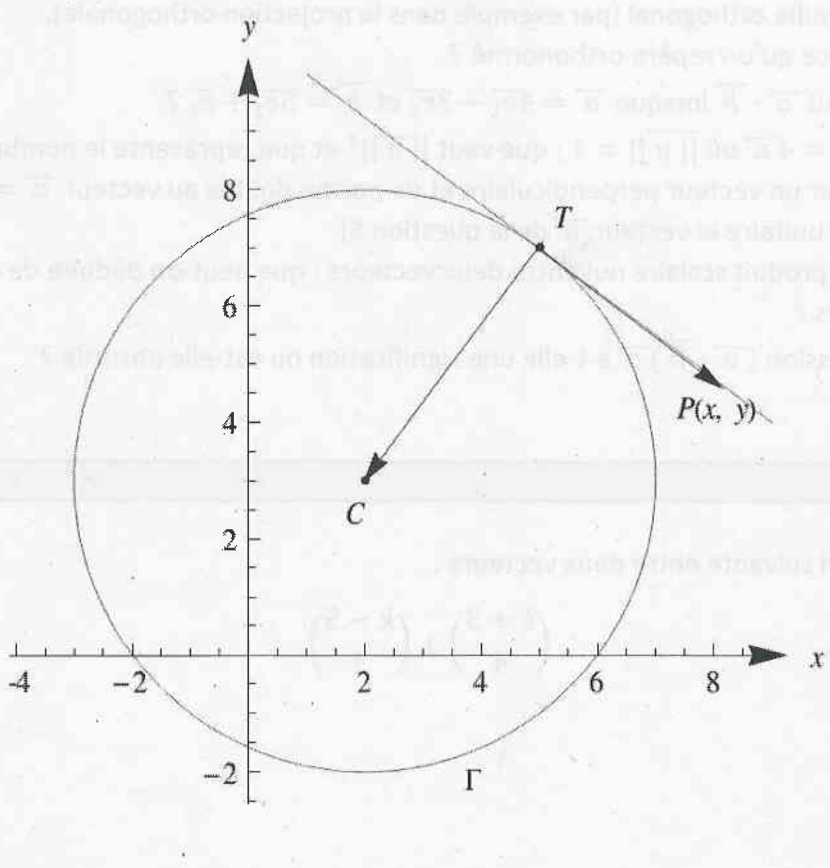
Emma

Chapitre 2
Géométrie dans le plan
2D
Exercices



Exercice 1

Soit $\overrightarrow{a} = \binom{5}{2}$ donner :

- les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{b}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$.
- les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{c}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$ et de sens opposé à $\overrightarrow{b}$.

Idem avec le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, donner :

- les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{b}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$.
- les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{c}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$ et de sens opposé à $\overrightarrow{b}$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, donner une équation cartésienne d'une droite perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$.

Exercice 2

Déterminer l'équation de la droite d_2 perpendiculaire à la droite $d\colon -5x + 2y - 6 = 0$ et coupant celle-ci au point d'abscisse $x = 4$.

Exercice 3

Répondre aux questions suivantes :

1) Que signifie orthogonal (par exemple dans la projection orthogonale).
2) Qu'est-ce qu'un repère orthonormé ?
3) Que vaut $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ lorsque $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$?
4) Soit $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{u}$ où $||\overrightarrow{u}|| = 1$; que vaut $||\overrightarrow{a}||^2$ et que représente le nombre obtenu ?
5) Proposer un vecteur perpendiculaire et de norme double au vecteur $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.
6) Rendre unitaire le vecteur $\overrightarrow{a}$ de la question 5).
7) Soit un produit scalaire nul entre deux vecteurs : que peut-on déduire de ces deux vecteurs ?
8) L'expression $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$ a-t-elle une signification ou est-elle absurde ?

Exercice 4

Si on la relation suivante entre deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} k+3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} k-5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut k ?

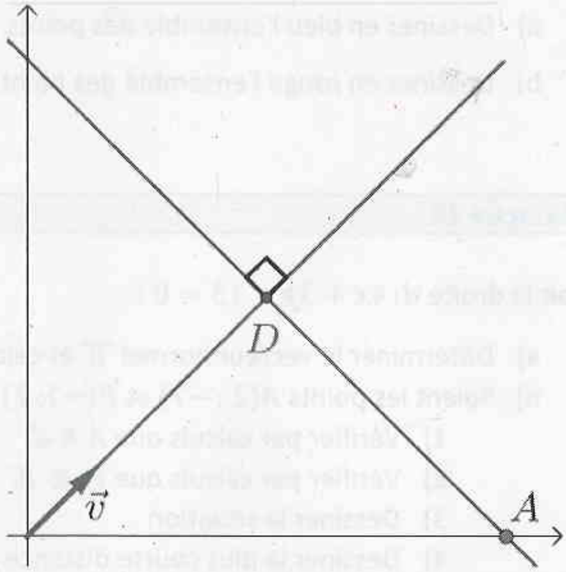
Exercice 5

Soient les vecteurs $\overrightarrow{a} = \binom{2}{5}$ et $\overrightarrow{b} = \binom{-3}{8}$:

a) Calculer le produit scalaire entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

b) Calculer b' : la projection orientée de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$ et a' : la projection orientée de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$

Exercice 6

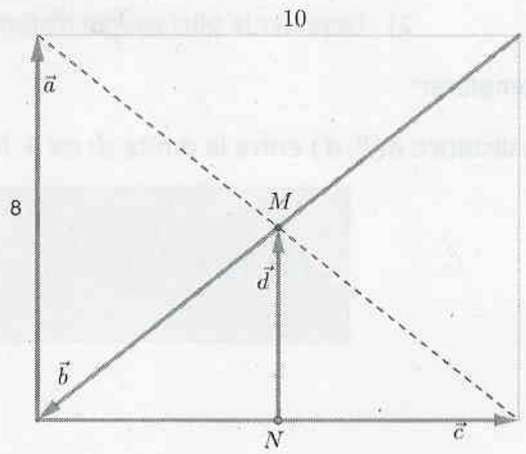


Soient $\overrightarrow{v} = \binom{1}{1}$ et $A(\frac{13}{2}; 0)$:

Calculer les coordonnées du point ~~B~~. D

Exercice 7

Soit un rectangle de côté 8 et 10. M est l'intersection des diagonales et N est le point milieu de la longueur. Compléter en utilisant la forme géométrique du produit scalaire :



a)	$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} =$	b)	$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$
c)	$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} =$	d)	$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} =$
e)	$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} =$	f)	$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} =$
g)	$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} =$	h)	$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} =$
i)	$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{d} =$	j)	$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{d} =$

Exercice 8

x - 6 = 3y

Le vecteur $\vec{v} = 4\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ est projeté sur la droite $d: x - 3y - 6 = 0.$ y = 1/3 x - 2

Sur un dessin précis montrer la projection, puis calculer ce vecteur.

Exercice 9

Soient A, B deux points fixes.

a) Dessiner en bleu l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

b) Dessiner en rouge l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

Exercice 10

Soit la droite $d: 4x + 3y + 13 = 0$:

a) Déterminer le vecteur normal $\vec{n}$ et calculer sa longueur

b) Soient les points $A(2\,; -7)$ et $P(-1; 2)$:

1) Vérifier par calculs que $A \in d$
2) Vérifier par calculs que $P \notin d$
3) Dessiner la situation
4) Dessiner la plus courte distance entre P et d (On la note $\delta(P; d)$) et calculer cette distance

Indication : Penser à la projection et produit scalaire de $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{n}$

c) Soient les points $A(2; -7)$ et $P(x; y)$:

1) Dessiner la situation en admettant que $P \notin d$
2) Dessiner la plus courte distance entre P et d

Compléter :

La distance $\delta(P; d)$ entre la droite $d: ax + by + c = 0$ et le point $P(x; y)$ vaut :

$\delta(P; d) =$

Exercice 11

Répondre aux questions suivantes :

a) Qu'est-ce qu'un vecteur normal à une droite ?
b) L'équation $x - 3 = 0$ peut-elle être l'équation normale d'une droite ?
c) Mettre sous forme normale l'équation $3x - 4y + 1 = 0$
d) Donner les deux vecteurs normaux unitaires à la droite $x + y - 2 = 0$
e) Construire la droite $d_4 : x + y = 0$ puis dessiner les droites qui sont à distance 2 de la d. d4
f) Soit la droite d_4, le point $L \in d$, le point $T \notin d$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur normal unitaire à ~~d~~ d4 ; écrire la distance $\delta(T; d)$ d4 à l'aide d'un produit scalaire.
g) Que vaut $\delta(O; d)$ si d a pour équation normale $0.8x - 0.6y - 4 = 0$?
h) En écrivant $|0.8x - 0.6y - 4| = 3$ quel lieu géométrique cherche-t-on ?

Exercice 12

Soit la droite $d: 5x - 12y - 25 = 0$

a) Identifier dans cette équation un vecteur $\overrightarrow{n} \perp d$ et un point $A \in d$.

Soit $P(x; y)$ un point quelconque du plan (donc pas obligatoirement sur la droite d) :

b) Écrire les expressions $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}$ et $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||}$ à l'aide des composantes des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{n}$
c) Si $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, que pouvez-vous dire du point P ?
Traduire en français la condition $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ en se référant notamment à P
d) Si $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||} = 0$, que pouvez-vous dire de P ?
Traduire en français la condition $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||} = 0$ en se référant notamment à P

Exercice 13

Calculer les points de la courbe $h: y = \frac{1}{x}$ situés à distance $\frac{6}{5}$ de la droite $d: 3x + 4y - 2 = 0$

Exercice 14

Chercher les équations des bissectrices des deux droites :

$$d_1: 4x - 3y + 6 = 0 \quad \text{et} \quad d_2: x - 3 = 0$$

Exercice 15

Déterminer l'équation hessienne de :

a) $d_1 : A(7;-2) \in d_1$ et $d_1 \perp \binom{3}{4}$

b) $d_2 : B(0;-5) \in d_2$ et $d_2 \perp d : 3x - 6y - 1 = 0$

c) $d_3 : y = \frac{2}{3}x - 1$

d) d_4 : Axe Ox

e) d_5 : Axe Oy

f) d_6: Médiatrice du segment MN avec $M(2;5)$ et $N(-3;2)$

Exercice 16

Soit une triangle ABC de sommets $A(1;2)$, $B(6;-10)$ et $C(-2;6)$:

a) Calculer une équation hessienne de :
   - d_{AB}, la droite passant par les sommets A et B
   - d_{AC}, la droite passant par les sommets A et C

b) Calculer le(s) point(s) situés à distance de 8 des droites d_{AB} et d_{AC}

Exercice 17

Soient les droites $d_1 : 2x - 5y - 3 = 0$ et $d_2 : 4x - 10y - 13 = 0$

a) Montrer que $d_1 // d_2$
b) Calculer $\delta(d_1; d_2)$
c) Donner une équation de d telle que d soit l'axe de symétrie de $d_1 \cup d_2$ et $d // d_1$

Exercice 18

Soient les droites $d_1 : 2x - y + 5 = 0$ et $d_2 : 4x - 3y + 10 = 0$

Calculer le(s) point(s) de d à distance 3 de d_1

Exercice 19

Pour cet exercice il n'y a rien à calculer, il suffit de répondre avec des dessins commentés :

Prendre deux points A et B choisis librement sans leur donner de coordonnées, puis chercher le lieu géométrique de P dans chacun des cas suivant :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = ||\overrightarrow{AB}||^2$
c) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$
d) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 10$
e) $det(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{AB}) = 0$

Exercice 20

Soit la parabole $p: y = x^2$ et la droite $d: y = x - 1$:

a) Déterminer les coordonnées du point $A \in p$ tel que $\delta(A; d) = \pm 2\sqrt{2}$
b) Déterminer les coordonnées du point $B \in p$ tel que $\delta(B; d) = \pm \frac{1}{2}$
c) Déterminer les coordonnées du point $C \in p$ tel que $\delta(C; d) = \pm \frac{3\sqrt{2}}{8}$

Exercice 21

Calculer la plus courte distance entre les droites :

$$d_1: 4x - 3y - 12 = 0 \quad \text{et} \quad d_2: 8x - 6y - 9 = 0$$

Exercice 22

a) Soit la droite $d: 3x - 4y = 10$ et le point $A(8; 1)$:
- Calculer la distance $\delta(A\,; d)$
- Déterminer le lieu (équation + nature) des points à distance 2 de la droite d

b) Soit la droite $d : y - 2 = 0$ et le point $A(0; 8)$
- Calculer la distance $\delta(A\,; d)$
- Déterminer le lieu (équation + nature) des points à distance 2 de la droite d
- Quel est le lieu (équation + nature) des points équidistants de A et d

Exercice 23

Soit le point $A(0;2)$:

a) Expliquer pourquoi $\frac{mx-y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$ est la forme générale de l'équation hessienne des droites non verticales passant par l'origine.
b) Quelle est l'équation de la droite d passant par l'origine et telle que la distance $\delta(A;d) = \pm 1$?
c) Dessiner la situation

Exercice 24

Soient les points $A(10;-1)$ et $K(-1;1)$:

a) Trouver la forme générale de l'équation hessienne des droites non verticales passant par A
b) Donner une équation de la droite d passant par A et telle que $\delta(K;d) = \pm 5$?
c) Dessiner la situation

Exercice 25

Calculer les angles du triangle dont les côtés sont sur les droites suivantes :

$d_1: x - 2y + 2 = 0$ | $d_2: 3x + y - 15 = 0$ | $d_3: x - 5y = 0$

Exercice 26

Soit le triangle ABC donné par les coordonnées de ses sommets : $A(-1;2)$, $B(2;-3)$ et $C(7;3)$. Etablir l'équation de la hauteur du triangle passant par le sommet C.

Exercice 27

On considère un triangle ABC donné par les coordonnées de ses sommets : $A(0;6)$, $B(4;3)$ et $C(-1;0)$:

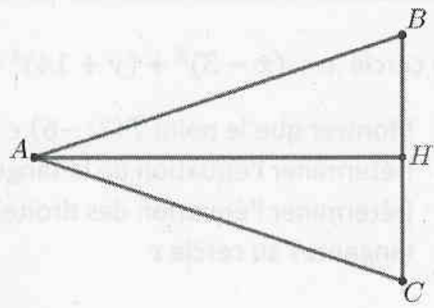
a) Illustrer ce triangle dans un repère orthonormé
b) Donner une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes :
   - d_1 côté BC
   - d_2 médiatrice du côté AB
   - d_3 médiane issue du somment C
   - d_4 hauteur du triangle issu de A
c) Calculer la surface du triangle par la méthode du déterminant
d) Calculer cette même surface par la géométrie élémentaire ($\frac{base \cdot hauteur}{2}$)

Exercice 28

ABC est isocèle.

$AB = 12$, $BC = 8$

Déterminer la valeur exacte de $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$



Exercice 29

Soient le point $K(2;3)$ et un rayon $r = 5$:

a) Trouver le lieu (équation + nature) de tous les points à distance r du point K
b) Idem avec $K(-2;4)$ et $r = 2$
c) Idem avec $K = O = (0;0)$ et $r = 1$
d) Idem avec $K(1;0)$ et $r = 13$

Exercice 30

Répondre aux questions suivantes :

a) Que représente $(x;y)$ dans l'équation du cercle $c : x^2 + y^2 = 13$?
b) On prend le cercle trigonométrique, on déplace son centre en $C(5;-2)$; quelle est l'équation du nouveau cercle ?
c) Donner l'équation du cercle passant par l'origine et centré en $C(1;-3)$
d) Calculer l'intersection du cercle $c : (x-5)^2 + (y+11)^2 = 125$ avec Ox
e) Chercher le centre et le rayon du cercle d'équation $c : x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

Exercice 31

Etablir l'équation du cercle centré sur Oy et passant par les points $A(-6;0)$, $B(2;12)$

Exercice 32

Un cercle est de centre $C(3;1)$ et passe par les points $A(5;4)$.

a) Calculer le rayon de ce cercle
b) Calculer B , le point sur le cercle tel que $\overrightarrow{CB} // \binom{0.6}{0.8}$

Exercice 33

Soit le cercle $c:\ (x-3)^2+(y+14)^2-68=0$ et le vecteur $\overrightarrow{v}=\binom{1}{-1}$

a) Montrer que le point $T(1;-6)\in c$
b) Déterminer l'équation de la tangente au cercle $c$passant par le point T
c) Déterminer l'équation des droites t_1 et t_2 telles que $t_1//t_2$ et que t_1, t_2 sont tangentes au cercle c

Exercice 34

Soit c le cercle de centre $K(-1;2)$ et de rayon $r=5$:

a) Trouver les droites tangentes au cercle c qui soit parallèles au vecteur $\overrightarrow{v}=\binom{5}{2}$
b) Trouver la droite tangente à c qui passe par le point $T(3;5)$

Exercice 35

Soit $c:\ x^2+y^2-8x-2y+4=0$ et $d: 2x-3y-18=0$

a) Trouver le centre K et le rayon r du cercle c
b) Déterminer la position relative (le nombre de points d'intersection) de d et c
c) Trouver l'équation de la droite d_1 parallèle à d et tangente au cercle c

Exercice 36

Soit le cercle $c:\ x^2+y^2-12=0$ et $c_2:\ (x-8)^2+(y+4)^2-4=0$ ainsi que la droite d'équation $d: x+y-7=0$:

a) Montrer (par calculs) que la droite d ne coupe aucun des deux cercles.
b) Calculer les coordonnées de A : le point de d le plus proche de c_1.
c) Calculer les coordonnées de B : le point de c_2 le plus proche de d.

Exercice 37

Soient les droites $d_1: y=\frac{3}{4}x-2$ et $d_2: y=-10$

Déterminer (par calculs) l'équation du cercle de rayon $r=10$ tangent aux deux droites.

(Commencer par faire un dessin de la situation)

Exercice 38

Soient les points $A(4;4)$ et $B(1;3)$ ainsi que la droite $d : 2x + y - 14 = 0$

Déterminer (par calculs)l'équation du cercle c tel que A et B soient sur c et que d soit tangent à c.

Exercices supplémentaires

Exercice supplémentaire 1

On donne un triangle par ses 3 sommets $A(-5;3)$, $B(0;-5)$ et $C(7;9)$:

a) Dessiner ce triangle
b) Trouver une équation cartésienne des droites d_{AC} et d_{BC}
c) Trouver une équation cartésienne de la médiane passant par le sommet A
d) Déterminer une équation de la hauteur issue du sommet B
e) Déterminer une équation de la bissectrice intérieure au sommet C

Exercice supplémentaire 2

Résoudre les problèmes suivants :

a) Déterminer m de façon à ce que la droite $d : 3x - 4y + m = 0$ soit tangente au cercle $c : \ x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$
b) Soit c un cercle défini par l'équation : $c : \ (x-3)^2 + (y-k)^2 = 2k^2$. Calculer la valeur de k pour que la droite $d : \ x - y + 5 = 0$ soit tangente au cercle c.

Exercice supplémentaire 3

Résoudre les problèmes suivants :

a) Un cercle de rayon 3 et de centre d'abscisse -2 est tangent à la droite $d : 4x + 3y + 3 = 0$. Déterminer l'équation de ce cercle.
b) Après avoir vérifié que le point $T(-5;7)$ est sur le cercle $c : \ x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, déterminer l'équation de la tangente à c au point T.

Exercice supplémentaire 4

Définir la position relative des éléments suivants :

a) La droite $d_1 : 3x + 4y - 6 = 0$ par rapport à la droite $d_2 : -x + 5y + 12 = 0$.
b) Le cercle $c : \ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ par rapport à la droite $d_3 : x - 2y - 1 = 0$
c) Le cercle $c_1 : \ x^2 + (y-2)^2 = 25$ par rapport au cercle $c_2 : \ (x+4)^2 + y^2 = 49$

Exercice supplémentaire 5

Transformer les équations de cercle suivantes de façon à trouver le rayon et le centre facilement, puis préciser le centre et le rayon de chacun :

a) $c_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 14 = 0$
b) $c_2 : x^2 + y^2 + x = 0$

Exercice supplémentaire 6

Résoudre les problèmes suivants :

a) Montrer que l'équation ci-dessous est l'équation d'un cercle de rayon 5 centré en $K(3; -2)$:

$$c : 3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y - 36 = 0$$

b) Déterminer une équation pour la tangente au cercle c au point $T(7; 1)$
c) Déterminer la plus courte distance entre la droite $d_1 : y = \frac{2}{3}x + 9$ et le cercle c
d) Déterminer les points d'intersection entre la droite $d_2 : y = x - 2$ et le cercle c

Exercice supplémentaire 7

Déterminer l'équation du cercle défini par les conditions suivantes :

a) Le centre est $C(2; -3)$ et le rayon vaut 7
b) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6; -8)$
c) $[AB]$ est un diamètre du cercle avec $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$
d) Le centre du cercle est $C(1; -1)$ et le cercle est tangent à la droite $t : 5x + 9 = 12y$
e) Le cercle passe par les points $A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$ et est centré sur $d : 3x = y + 2$
f) Le cercle est tangent à la droite $t_2 : x + y = 4$ au point $T(1; 3)$ et est centré sur Ox

Exercice supplémentaire 8

Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $d : 4x - 5y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites :

$t_1 : 2x = 3y + 10$ $\qquad$ $t_2 : 2y = 3x + 5$

Exercice supplémentaire 9

Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs dans les cas suivants :

a) $d : x - 2y - 1 = 0$ et $c : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$
b) $d_2 : y = x + 10$ et $c_2 : x^2 + y^2 = 1$

Exercice supplémentaire 10

Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle $c : x^2 + y^2 = 25$ et la droite d'équation $d : 2x - y - 5 = 0$

Exercice supplémentaire 11

Vérifier que le point T est sur le cercle c, puis déterminer les équations des tangentes à c au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1; 2)$ et $c : x^2 + y^2 = 5$
b) $T(-5; 7)$ et $c : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Exercice supplémentaire 12

Résoudre les problèmes suivants :

a) Déterminer les équations des tangentes au cercle $c : x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, et parallèle à la droite $d : 2x + y = 7$
b) Déterminer les équations des tangentes au cercle $c : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, perpendiculaire à la droite $d : x = 2y + 345$