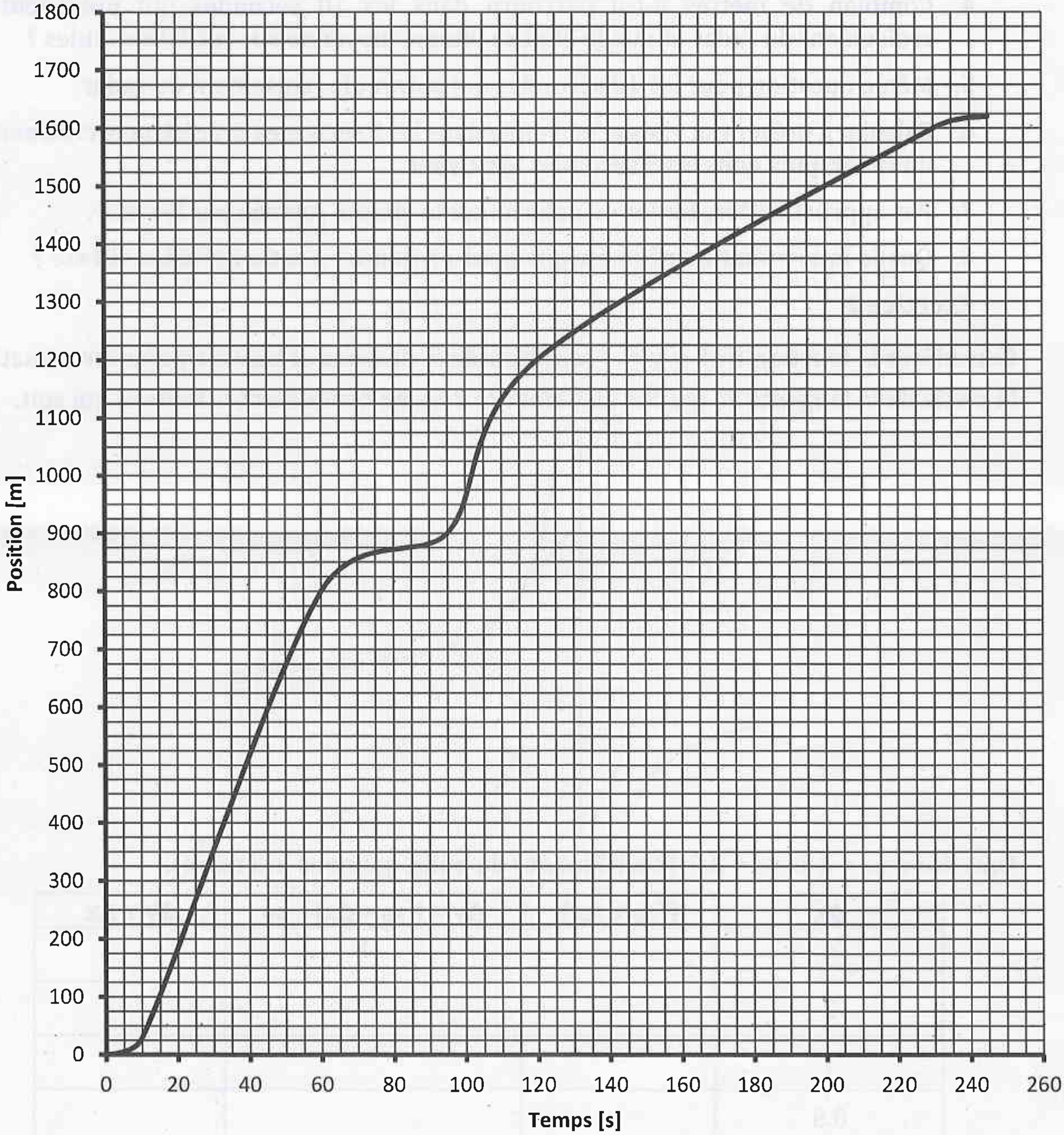
Exercice 1.

Bryan va en scooter du Lycée Jean-Piaget jusqu'à la Place Pury. Ce trajet fait 1.6 kilomètres et lui prend environ 4 minutes.

La circulation est fluide et Bryan a la chance de n'être ralenti qu'une seule fois par un feu rouge.
Voici un relevé graphique du compteur kilométrique de son scooter (exprimé en mètres) :

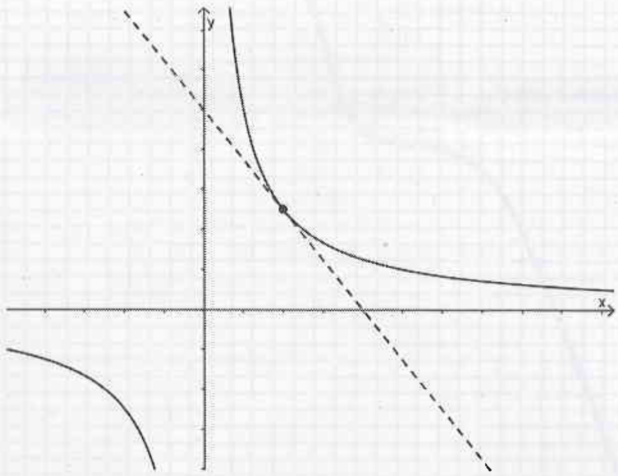


Répondre aussi précisément que possible aux questions suivantes :

1. Combien de mètres a-t-il parcouru au cours de la première minute de son trajet et quelle était sa vitesse moyenne durant cette première minute (en m/s ... puis en km/h !) ?
2. Mêmes questions pour la deuxième, la troisième et la quatrième minute.
3. Après 975 mètres de route, Bryan a croisé un radar. Depuis combien de temps roulait-il ?
4. Combien de mètres a-t-il parcouru dans les 10 secondes qui précèdent le croisement du radar et quelle était sa vitesse moyenne sur ces 10 secondes ?
5. Même question pour les 10 secondes qui suivent le croisement du radar.
6. Calculer à présent sa vitesse moyenne dans les 5 secondes précédant le croisement du radar, puis dans les 5 secondes le suivant.
7. Par approximation, tenter de déterminer la vitesse relevée par le radar.
8. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à cette dernière vitesse ?

Exercice 2.

Considérer la fonction $f(x) = y = \frac{5}{x}$ représentée ci-dessous et trouver par approximation la pente de la tangente au graphe au point (2 ; 2.5), en complétant le tableau qui suit.



On a donc $x_0 = 2$ et $y_0 = 2.5$ (coordonnées du point qui nous intéresse).

Δx	**f(x₀ + Δx)**	**Δy** = f(x₀ + Δx) − y₀	**Δy / Δx**
3			
2			
1			
0.5			
0.1			
0.01			
0.001			

Exercice 3.

(i) Reprendre la fonction f de l'exercice 2 et calculer l'expression suivante :

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

Et, plus généralement, de la limite :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Calculer $f'(2)$ puis donner l'équation de la tangente au graphe de f en x = 2.

Exercice 4.

Soit : $f(x) = x^2 - 3x$.

Avec la méthode en 5 étapes, déterminez la valeur de $f'(-2)$.

Exercice 5.

Soit : $f(x) = sinx$ et $P(x_0; y_0)$ l'un des points de son graphe et t la droite tangente au graphe de f en P. On sait que $f'(x) = cosx$.

Complétez ce tableau (les détails des calculs sont exigés).

x_0	$y_0 = f(x_0)$	**Pente de t**	**Équation de la droite t**
0			
$\frac{\pi}{2}$			
2π			
$\frac{\pi}{4}$			

Exercice 6.

Soit : $f(x) = 2 + cosx$, $P(x_0; y_0)$ l'un des points de son graphe. Déterminez :

1. L'ordonnée de P lorsque $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
2. La dérivée de la fonction f :
3. La pente de la droite t tangente au graphe de f en P ;
4. L'équation de t.

Exercice 7.

Considérer la fonction $f(x) = y = x^2 + 6x - 3$ dont la dérivée est $f'(x) = y' = 2x + 6$

(i) Trouver l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$.

(ii) Donner l'équation d'une tangente au graphe de f qui a une pente de 10.

(iii) Chercher une tangente horizontale au graphe de f. Quelle est sa pente ? Et son équation ?

Exercice 8.

Voici une liste de fonctions. Retrouvez, si possible, leurs dérivées respectives.

$y = 2x$

$y = 2$

$y = 2x^2$

$y = x^2$

$y = -2$

$y = x + 2$

$y = 2x - 2$

$y = x + x$

$y' = 2$ $y' = 2x$ $y' = -2$

$y' = -2x$ $y' = 0$

Solution

Voici une liste de fonctions. Retrouvez, si possible, leurs dérivées respectives.

$y = 2x$

$y = 2$

$y = 2x^2$

$y = x^2$

$y = -2$

$y = x + 2$

$y = 2x - 2$

$y = x + x$

$y' = 2$ $y' = 2x$ $y' = -2$

$y' = -2x$ $y' = 0$

Exercice 9.

Considérer les fonctions : $u(x) = x^{17}$ et $v(x) = 2x - 1$

dont les dérivées respectives sont : $u'(x) = 17x^{16}$ et $v'(x) = 2$.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f_1(x) = u(x) + v(x)$

(b) $f_2(x) = u(x) - v(x)$

(c) $f_3(x) = u(x) \cdot v(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

(e) $f_5(x) = (u \circ v)(x)$

(f) $f_6(x) = (v \circ u)(x)$.

Exercice 10.

Établir la fonction dérivée de :

$f(x) = 7x^2$	$g(x) = -\frac{2}{3}x + \sqrt{5}$	$h(x) = \sqrt{x}$
$l(x) = x^3$	$k(x) = \frac{1}{x+2}$	$p(x) = \frac{x}{x+1}$
$q(x) = 10$	$t(x) = \frac{1}{x^2}$	$r(x)=x+\sin x$

Exercice 11.

À l'aide des règles de dérivation, calculez la dérivée des fonctions suivantes :

1. $y = 10'000$
2. $y = x^3 - x^2$
3. $y = x^3 - x^2 + 10$
4. $y = 5x^3 - 6x^2$
5. $y = x^4 - 4x^2 + 9$
6. $y = \sqrt[4]{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - 9\sqrt[6]{x^2}$
7. $y = \frac{7}{\sqrt[7]{x}} + \frac{13}{\sqrt{x}} - 4\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$
8. $y = (x + 4)(x - 3)$
9. $y = (x + 4)(x - 3) + 30$
10. $y = \frac{x+4}{x-3}$

11. $y = \frac{x+4}{x-3} - 20$

12. $y = \frac{x}{3x^2-1}$

13. $y = \frac{x^2-1}{2x^2}$

14. $y = \frac{4-5x^2}{x^2-5+6}$

15. $y = \frac{2x-3}{x^2+5}$

16. $y = x + \frac{2x-3}{x^2+5}$

Exercice 12.

À l'aide des règles de dérivation, calculez la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 15'000$
2. $f(x) = 500x^{100} + 10'000$
3. $f(x) = \frac{8}{x^8} + 20\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{8}{x^8+20\sqrt{x}}$
5. $f(x) = 9^{10}$
6. $f(x) = \frac{\pi+\pi^2+\pi^3}{3}$
7. $f(x) = \frac{\pi+\pi^2+\pi^3}{3} \cdot x$
8. $f(\pi) = \frac{\pi+\pi^2+\pi^3}{3}$
9. $f(x) = (x^3 + 2x)^4$
10. $f(x) = (x^3 + 2x)sinx$
11. $f(x) = \sin(x^3 + 2x + \pi)$
12. $f(x) = (2 - \sin(3x))^5$
13. $f(x) = \frac{2+sinx}{x}$
14. $f(x) = \frac{3x^2-x+10}{-2x+3}$
15. $f(x) = \sqrt[3]{4x + x^2} - (2 - 5x)^3$
16. $f(x) = cos((x + 3)^5 - x^4)$
17. $f(x) = ax^3 + (a - 1)x + \cos(ax)$
18. $f(a) = ax^3 + (a - 1)x + \cos(ax)$

Exercice 13.

Soit $f(x) = (x+1)\cos(2x)$.

Déterminez l'équation de la droite tangente au graphe de f en son point $P\left(-\frac{3}{2}\pi; \ldots\right)$.

Exercice 14.

Soit $y = f(x)$.

À l'aide des règles de dérivation, calculez la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 7$

(b) $y = \sqrt{x}$

(c) $y = (x+1)\sqrt{x}$

(d) $y = \frac{1-x}{2x+3}$

(e) $y = \pi x^2 + 2\pi h x$

(f) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(g) $y = -\frac{k}{x}$

(h) $y = (2x-1)^3$

(i) $y = \frac{x^3+2}{x^2+1}$

(j) $y = (x^3+2)(x^2+1)$

(k) $y = \sqrt[3]{x}$

(l) $y = \sqrt[4]{x^3}$

(m) $y = (x^2 - 7x)^5$

(n) $y = (\sqrt{x} - x)^4$

(o) $y = \sqrt{x^2-7}\left(x^3 - 2x^2 - \frac{5}{9}\right.$

Exercice 15.

Établir le domaine, le tableau de croissance des fonctions suivantes et donnez les coordonnées des extrema :

$$f(x) = 7x - 3x^3 + 1 \qquad g(x) = \frac{x^2}{3x-4}$$

Exercice 16.

Établir le tableau de croissance des fonctions suivantes et donnez les coordonnées des extrema :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 \qquad g(x) = \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1}$$

$$h(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad k(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

Exercice 17.

Soit : $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$. Déterminez-en :

1. le domaine ;
2. l'ensemble des zéros ;
3. le tableau des signes ;
4. les éventuelles asymptotes ;
5. la dérivée première ;
6. le tableau de croissance ;
7. les extrema ;
8. l'équation de la droite tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x_0 = -2$.

Exercice 18.

Pour chacune des fonctions qui suivent, effectuer le travail suivant :

(a) Chercher les zéros de la fonction (intersections avec Ox) ainsi que l'intersection avec Oy.

(b) Chercher ses éventuelles asymptotes verticales.

(c) Déterminer les coordonnées des points du graphe à tangente horizontale.

(d) Calculer la pente de la tangente au graphe au point d'abscisse x = 3.

(e) Donner une équation de la tangente au graphe en ce même point.

(f) Dresser un tableau de croissance de la fonction

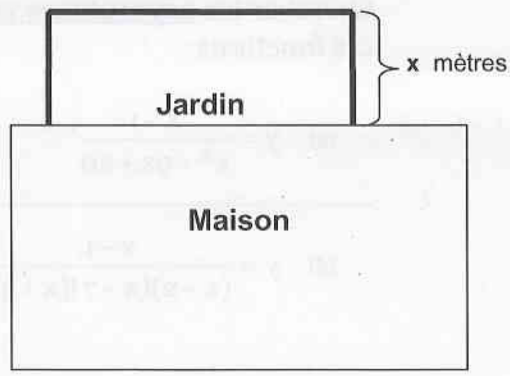
(g) Esquisser son graphe, en faisant figurer sur le graphe la droite du point (e).

(les points ***en gras*** *indiquent l'utilisation de la dérivée ; les autres sont en fait de la révision)*

$$f(x) = \frac{2x+3}{5-x} \qquad g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \qquad h(x) = \frac{3x^2+x+4}{x^2+1}$$

Exercice 19.

Le propriétaire d'une villa décide de créer un petit jardin adossé à sa maison, selon le plan ci-contre :



Il dispose de **18 mètres** de clôture ; il compte l'utiliser complètement et de façon optimale.

Il va de soit qu'il n'est pas utile de mettre une clôture le long de la maison !

(a) Dans l'hypothèse où le jardin s'écarte de 3 mètres de la maison (x = 3), quelle serait sa largeur et quelle serait sa surface ?

(b) Et si le jardin s'écarte de 4 mètres (x = 4) ?

(c) Et si le jardin s'écarte de 7 mètres ?

(d) Raisonnons de façon plus mathématique... Si le jardin s'écarte de **x** mètres, quelle est sa largeur, quelle est sa surface ?

Au point (d), on a calculé la surface S du jardin en fonction de l'écartement x. On a ainsi obtenu une fonction S(x).

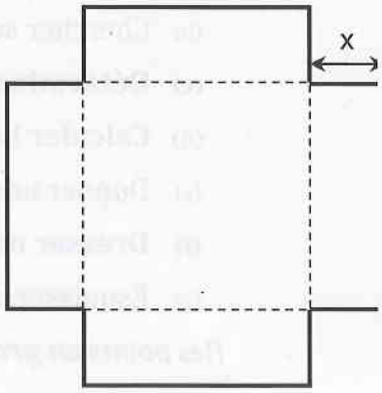
Le but est de faire le plus grand jardin possible ... il faut donc chercher si la fonction S(x) possède un maximum !

(e) Chercher les points à tangente horizontale de S(x) et tracer son tableau de croissance.

(f) Trouver s'il existe le maximum de S(x) et, le cas échéant, donnez ses coordonnées.

Exercice 20.

On considère une feuille de carton de 20 centimètres de côté ; on découpe les quatre coins selon le schéma suivant, de manière à pouvoir ensuite la plier pour former une boîte.



(i) Considérons tout d'abord le cas où la découpe est de 3 centimètres (x = 3).

- Quelle serait alors la surface de base de la boîte ?
- Et sa hauteur ?
- Et son volume ?

(ii) Répondre aux trois mêmes questions dans l'hypothèse où x = 5.

(iii) De façon plus générale, donner la surface de base de la boîte et sa hauteur en fonction de x.

(iv) Donner enfin le volume V(x) de la boîte en fonction de x.

(v) Étudier la croissance de la fonction V(x) afin de localiser un éventuel maximum dont on demande les coordonnées.

Exercice 21.

Chercher les **asymptotes verticales** et les **asymptotes non-verticales** pour chacune de ces fonctions :

(a) $y = \frac{x-1}{x^2+9x+20}$	(b) $y = \frac{x^2+9x+20}{x-1}$	(c) $y = \frac{x^3-5x^2+x-9}{x^2-4x+2}$
(d) $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-7)(x+3)}$	(e) $y = \frac{x^2+16}{x-5}$	(f) $y = 2x+7 \frac{1}{x^2-25}$

Exercice 22.

Dériver les fonctions suivantes (en simplifiant au mieux les solutions, en particulier en mettant en évidence autant de termes que possible) :

$f_1(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$	$f_2(x) = \frac{5}{x^2}(\sqrt{x}+1)$	$f_3(x) = \sin(x)\cos(x)$
$f_4(x) = \frac{\cos(x)^3}{x}$	$f_5(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$	$f_6(x) = kx^{2n}\cos(x)$

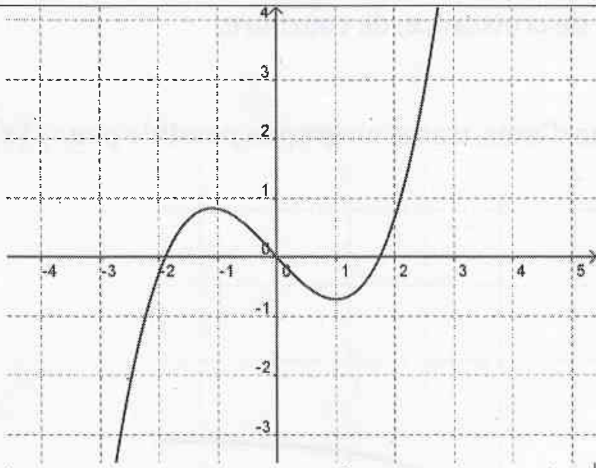
Exercice 23.

Rechercher les points à tangente horizontale et dresser le tableau de croissance de la fonction d'équation : $y = x^4 + 3x^3 - x^2$.

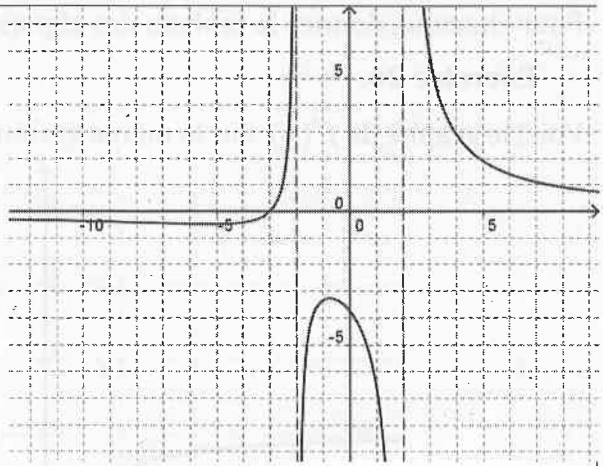
Donner ensuite l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse $x = 10$.

Exercice 24.

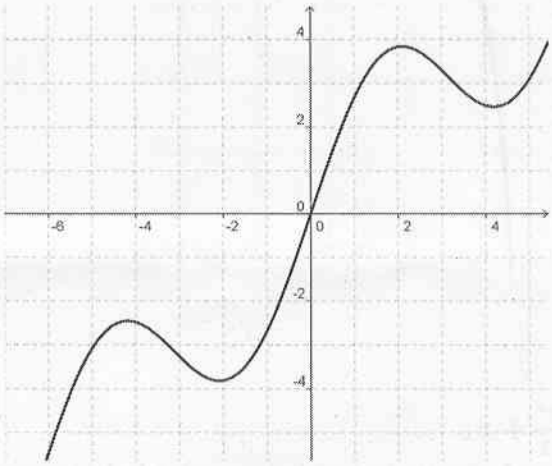
Chercher les coordonnées exactes des sommets visibles sur les graphiques suivants :



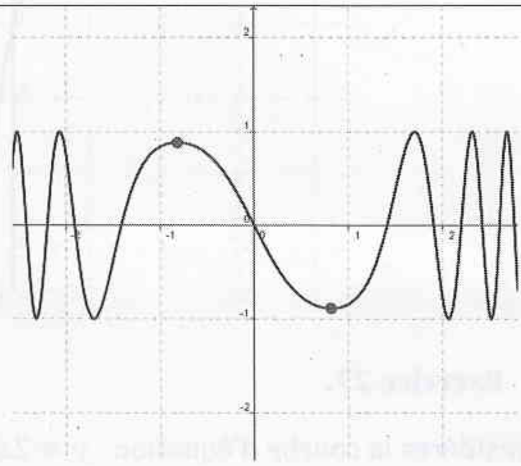
$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - \frac{11}{10}x$$



$$y = \frac{5x + 15}{x^2 - 4}$$

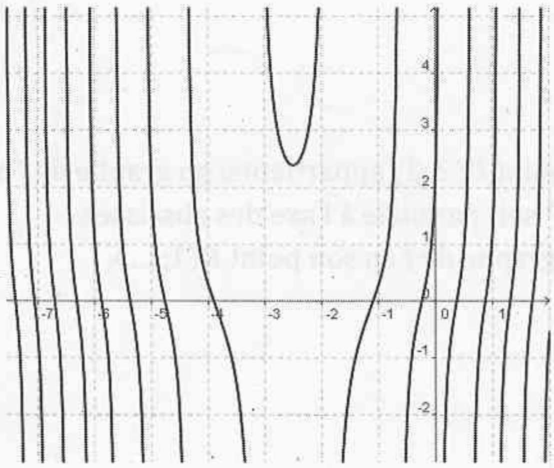


$$y = 2\sin(x) + x$$

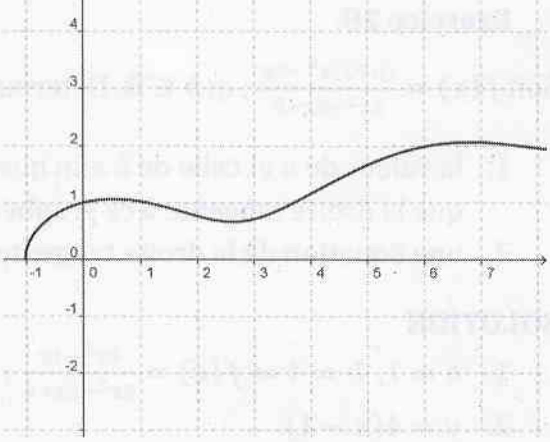


$$y = \sin(x^3 - 2x)$$

(uniquement les deux sommets indiqués)



$$y = \tan(x^2 + 5x - 2)$$



$$y = \sqrt{\cos(x) + \frac{x}{2}}$$

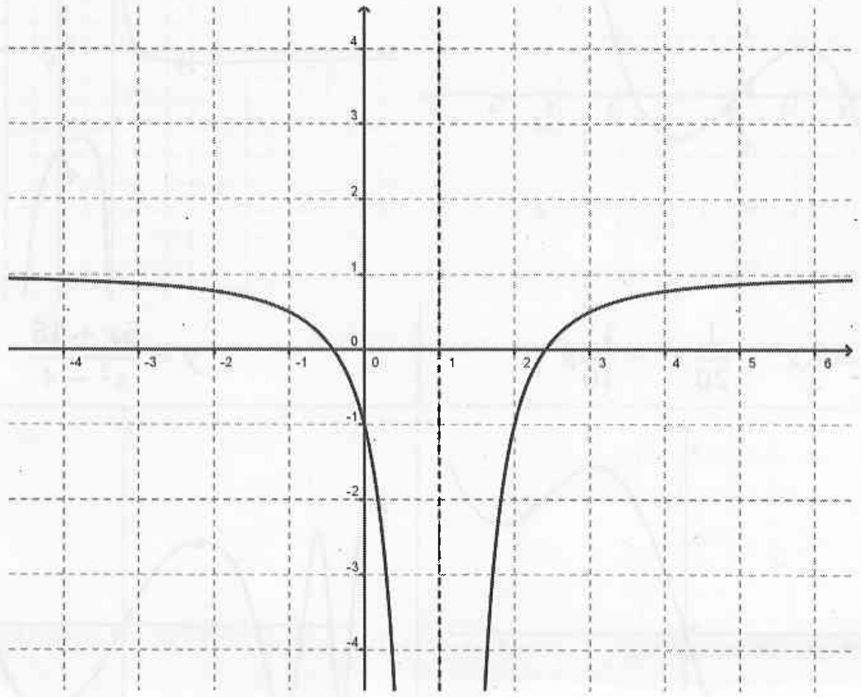
Exercice 25.

Considérez le graphe des trois premières fonctions de l'exercice précédent.

Pour chacune, donnez le tableau des signes, de croissance, de courbure.

Exercice 26.

Voici le graphe de $f'(x)$. Sur le même système d'axes, tracer un graphe possible pour $f(x)$.



Exercice 27.

Considérez la courbe d'équation : $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + x$.
Déterminez les coordonnées des points du graphe pour lesquels la pente de la tangente est égale à 2.

Exercice 28.

Soit $f(x) = \frac{(a+3)x^2-4x}{3x^2-6x+b}$; $a; b \in \mathbb{R}$. Déterminez :

1. la valeur de a et celle de b afin que le point $P(2; 2)$ appartienne au graphe de f et que la droite tangente à ce graphe en P soit parallèle à l'axe des abscisses.
2. une équation de la droite tangente au graphe de f en son point $R(1; \ldots)$.

SOLUTION

1. $a = 1;\ b = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{4x^2-4x}{3x^2-6x+4}$;
2. $y = 4(x-1)$.

Exercice 29.

Soit $f(x) = ax^3 - 5x^2 + 3x + b$; $a; b \in \mathbb{R}$. Déterminez :

1. la valeur de a et celle de b afin que $A(3; -1)$ soit un point d'inflexion de *f*.
2. une équation de la droite tangente au graphe de *f* en A.

SOLUTIONS

1. $f(x) = \frac{5}{9}x^3 - 5x^2 + 3x + 20$;
2. $y = -12x + 35$.

Exercice 30.

Soit $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$; $a; b; c; d \in \mathbb{R}$.

Déterminez la valeur de a ; b ; c ; d afin que les conditions suivantes soient vérifiées:

1. le droites d'équation $x = 1$ et $y = 2x$ sont asymptotes de f;
2. $P(2; 0)$ appartient au graphe de *f*.

SOLUTION

$$a = 2; b = -2; c = -4; d = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x - 1}.$$

Exercice 31.

Dresser le tableau de signes, le tableau de croissance et le __**tableau de courbure**__ des fonctions suivantes :

(a) $y = x^2$ (b) $y = \frac{1}{3}x - 5$

(c) $y = -x^2 + 1$ (d) $y = \frac{2}{-3x}$

(e) $y = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ (f) $y = x^6 - 3x^4$

(g) $y = x^3 + 4$ (h) $y = \frac{x+3}{x-4}$

Exercice 32.

Soit la fonction : $f(x) = y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 15$

1. Localisez ses points à tangente horizontale s'il y en a ;
2. Déterminez une équation de la droite tangente au graphe de f en son point d'inflexion.

Exercice 33.

1. Déterminer deux nombres x et y positifs tels que leur somme soit égale à 11 et le produit x^3y^2 soit maximal.
2. Trouver les dimensions de la boîte de conserve cylindrique dont l'aire totale est minimale, le volume étant de 1000 cm³.

Exercice 34.

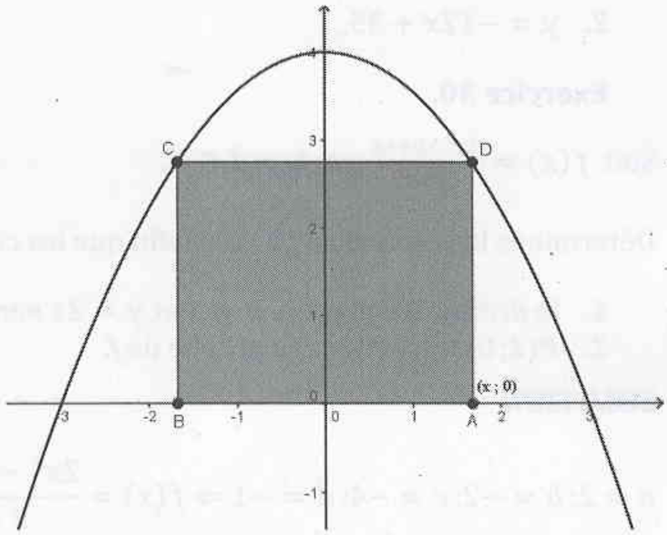
Le rectangle ci-contre est dessiné de la façon suivante :

✓ le point A est choisi librement sur l'axe Ox, entre x = 0 et x = 3 ;

✓ le point B est placé symétriquement de l'autre côté de l'origine ;

✓ les points D et C sont placés à la verticale de A et B, sur la parabole d'équation

$$y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$



On cherchera à placer judicieusement le point A afin de maximiser le périmètre (puis l'aire) du rectangle ABCD.

(i) Poser x = 1,5 (on a donc le point A(1,5 ; 0)) et chercher les coordonnées de B, C et D. Calculer alors le périmètre et l'aire du rectangle ABCD.

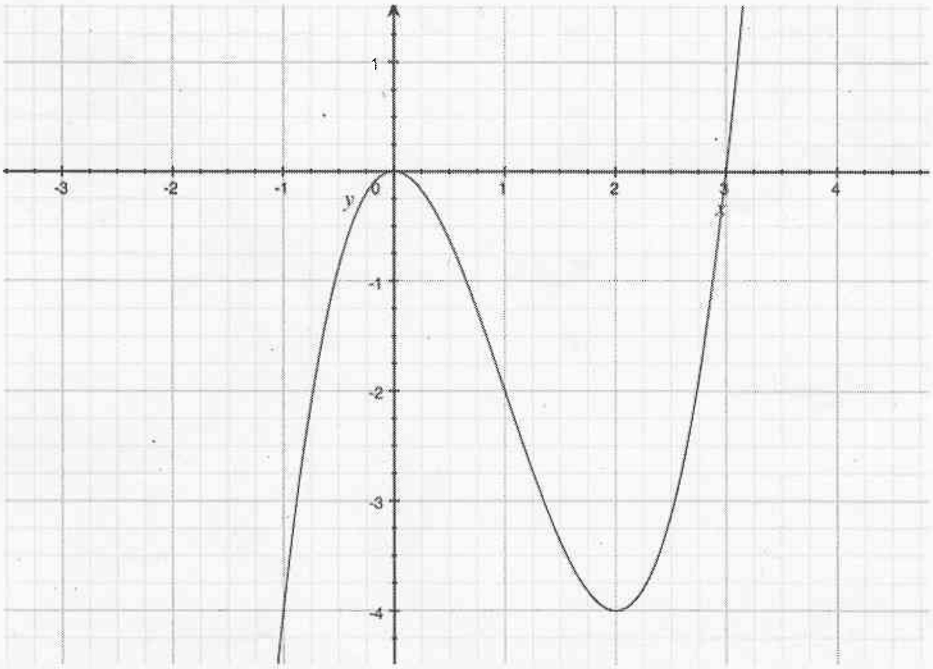
(ii) En considérant que le point A a pour coordonnées (x ; 0), chercher les coordonnées des points B, C et D (elles dépendent bien sûr de x).

(iii) Déterminer la longueur et la largeur de ce rectangle en fonction de x, puis trouver la fonction p(x) qui exprime son périmètre. Établir son tableau de croissance et chercher d'éventuels maximums ou minimums.

(iv) Faire de même pour la surface : trouver la fonction a(x) qui exprime l'aire du rectangle et, par le biais de son tableau de croissance, chercher à la maximiser.

Exercice 35.

Soit f la fonction d'équation $y = f(x)$ dont le graphe est représenté ci-contre :



SANS faire de calculs :

a) Placez précisément sur ce graphe le/s point/s à tangence horizontale.
b) Dressez le tableau de croissance et le tableau de courbure de f.
c) Esquissez le graphe de $y = f'(x)$.
d) Combien de solutions l'équation $f(x) = -1$ a-t-elle ? pourquoi ? montrez-les clairement sur le graphe.
e) Combien de solutions l'équation $f'(x) = -1$ a-t-elle ? pourquoi ? montrez-les clairement sur le graphe.
f) Placez approximativement le/s point/s correspondant à $f'(x) = 2$ et montrez sur ce même graphe le critère adopté, puis expliquez.