LDDR- Niveau 2 : TE 6 – Fonctions - solutions

Nom : Prof

1MG04 - N2 **TE no.6 - Fonctions** **23.3.2015**

Justifiez vos résultats ! *Bon travail !*

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+14}$.

Le graphe de f coupe l'axe des x en $x = -\frac{1}{7}$ et possède les asymptotes $x = 2$ et $y = -5$. Déterminer les coefficients a, b et c.

- Exclu : $x = 2 \Rightarrow 2c + 14 = 0 \Rightarrow \underline{c = -7}$
- As. horizontale $y = \frac{a}{c} = -5 \Rightarrow \underline{a = 35}$.
- $-\frac{1}{7}a + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 5}$.

Exercice 2 (4 points)

On donne la fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{3-x}{x+2}$. Trouver les équations des droites de pente -5 qui sont tangentes au graphe de f.

$y = -5x + h$; un seul pt. d'intersection avec f.

$\Rightarrow -5x + h = \dfrac{3-x}{x+2}$ a une seule solution

$-5x^2 + hx - 10x + 2h = 3 - x$

$\Rightarrow 5x^2 + (9-h)x + 3 - 2h = 0$ a une seule solution,

donc $\Delta = 0 = (9-h)^2 - 20(3-2h)$

$\Rightarrow 81 - 18h + h^2 - 60 + 40h = 0$

$h^2 + 22h + 21 = 0$

$(h+1)(h+21) = 0$

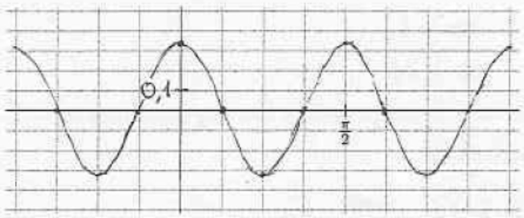
$h_1 = -1 \Rightarrow \underline{t_1 : y = -5x - 1}$

$h_2 = -21 \Rightarrow \underline{t_2 : y = -5x - 21}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = \frac{1}{3}\cos(4x)$.

a) Donner le domaine de définition, l'ensemble des images ainsi que la période de f, puis représenter graphiquement la fonction f.



$D = \mathbb{R}$, $A = \left[-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right]$

période $T = \frac{\pi}{2}$

$(0 ; \frac{1}{3}) ; (\frac{\pi}{8} ; 0) ; (\frac{\pi}{4} ; -\frac{1}{3}) ; (\frac{3\pi}{8} ; 0) \ldots$

c) Déterminer l'expression fonctionnelle $f^{-1}(x)$ de la réciproque de f.

$$y = \frac{1}{3}\cos(4x) \Rightarrow 3y = \cos(4x)$$

$$\Rightarrow 4x = \arccos(3y) \Rightarrow x = \frac{1}{4}\arccos(3y).$$

Donc $\underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\arccos(3x)}$.

Exercice 4 (4 points)

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto y = \log\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$.

f est définie lorsque $\frac{x-2}{x-3} > 0$

x		2		3	
$\frac{x-2}{x-3}$	+	0	-	‖	+

$\Rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R} \setminus [2 ; 3] =]-\infty ; 2[\cup]3 ; \infty[}$

b) Résoudre l'équation $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(10)$.

$$\ln((x-1)(x+2)) = \ln(10)$$

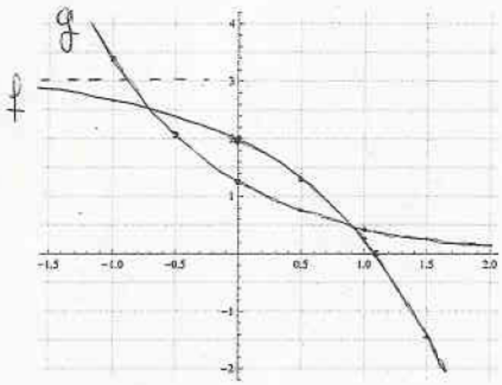
donc $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 10$

$$\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 = (x+4)(x-3)$$

$\cancel{x_1 = -4}$ parasite et $\underline{x_2 = 3}$ ✓

Exercice 5 (7 points)
Considérons les fonctions $f : x \longmapsto y = 3 - e^x$ et $g : x \longmapsto y = \frac{5}{4}\,e^{-x}$.

a) Calculer l'ordonnée à l'origine et les zéros des fonctions f et g puis les représenter graphiquement.



$f : (0;2)$ et $3 - e^x = 0$
$\Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3) \cong 1{,}1$

$g : (0; \frac{5}{4})$, pas de zéro

b) Par calcul, déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection des graphes de f et de g.

$$3 - e^x = \frac{5}{4} e^{-x} \quad \Big| \cdot 4$$
$$12 - 4e^x = 5e^{-x} = \frac{5}{e^x} \quad \Big| \; u = e^x$$
$$12 - 4u = \frac{5}{u} \quad \Big| \cdot u$$
$$12u - 4u^2 = 5 \Longrightarrow 4u^2 - 12u + 5 = 0$$

$$\Delta = 144 - 80 = 64 \Longrightarrow u_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{8} = \frac{3 \pm 2}{2}$$

$$u_1 = \frac{5}{2} = e^x \Longrightarrow x_1 = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \cong 0{,}92 \Rightarrow y_1 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
et $\underline{I_1\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right); \frac{1}{2}\right)}$

$$u_2 = \frac{1}{2} = e^x \Longrightarrow x_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \left(= -\ln(2)\right) \cong -0{,}69$$
$$\Rightarrow y_2 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$ et $\underline{I_2\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right); \frac{5}{2}\right)}$.