LDDR- Niveau 2 : TE 5 – Fonctions - solutions

Nom : Prof

1MG04 - N2 **TE no.5 - Fonctions** **16.2.2015**

Justifiez vos résultats ! Bon travail !

Exercice 1 (6 points)

a) Trouver l'équation de la droite qui passe par les points $A(-1;5)$ et $B(3;3)$.

$y = mx + h$ avec $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-5}{3+1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + h$ passant par $A(-1;5)$: $5 = -\frac{1}{2}\cdot(-1) + h$

$\Rightarrow h = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ et finalement $\underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}$.

b) Trouver l'équation de la parabole (sous la forme de votre choix) qui passe par les points $C(-5;0)$, $D(1;0)$ et $E(-4;15)$.

On connaît les zéros, utilisons donc la forme factorisée :

$y = a(x+5)(x-1)$ passe par $E(-4;15)$

$15 = a\cdot(-5) \Rightarrow a = -3$ et donc $\underline{y = -3(x+5)(x-1)}$.

$(= -3x^2 - 12x + 15)$

c) Trouver l'équation de la parabole (sous la forme de votre choix) de sommet $S(-1;5)$ et d'ordonnée à l'origine -3.

Forme du "carré complété" : $y = a(x-x_S)^2 + y_S$

$S(-1;5) \Rightarrow y = a(x+1)^2 + 5$ passe par $(0;-3)$:

$-3 = a + 5 \Rightarrow a = -8$,

donc $\underline{y = -8(x+1)^2 + 5}$.

Exercice 2 (8 points)

On donne les fonctions $f : x \longmapsto y = x^2 - 4x + 3$ et $g : x \longmapsto y = x + 1$.

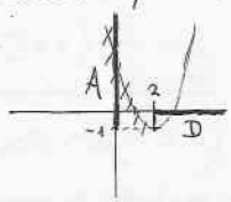
a) Déterminer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ (simplifier au maximum les expressions obtenues).

$$\underline{(g \circ f)(x)} = g(f(x)) = g(x^2 - 4x + 3) = x^2 - 4x + 3 + 1$$
$$= \underline{x^2 - 4x + 4}.$$

$$\underline{(f \circ g)(x)} = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 3$$
$$= x^2 + 2x + 1 - 4x - 4 + 3 = \underline{x^2 - 2x}.$$

b) Trouver des ensembles D et A tels que $f : D \longrightarrow A$ soit bijective et déterminer $f^{-1}(x)$.

Le graphe de f est une parabole ouverte vers le haut, de sommet $S(2;-1)$;



f est bijective pour $\underline{D = [2;\infty[}$ et $\underline{A = [-1;\infty[}$.

$$y = x^2 - 4x + 3 \implies x^2 - 4x + 3 - y = 0$$
$$(x-2)^2 + 3 - y = 4$$
$$(x-2)^2 = y + 1$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{y+1}$$
$$f^{-1}(y) = x = 2 \pm \sqrt{y+1} \in [2;\infty[\text{ si l'on choisit le signe } +.$$

Donc $f^{-1} : [-1;\infty[\longrightarrow [2;\infty[$

$$x \longmapsto y = \underline{f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}}.$$

Exercice 3 (3 points)

La droite d'équation $y = 2x + h$ est tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - x - 4$. Trouver h.

$x^2 - x - 4 = 2x + h$ a une seule solution (1pt d'intersection)

$x^2 - 3x - 4 - h = 0$ vérifie donc $\Delta = 0$.

$\Delta = 9 - 4(-4-h) = 9 + 16 + 4h = 4h + 25 = 0$,

donc $h = -\frac{25}{4}$.

Exercice 4 (5 points)

On donne la fonction polynomiale P par son expression $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $P(x) < 0$?

Cherchons les zéros de P : $x = 1$ est un zéro, donc $P(x)$ est divisible par $x - 1$

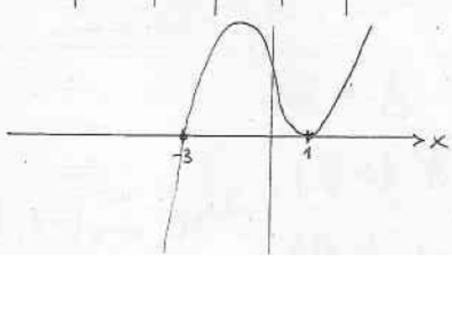
1	1	-5	3
0	1	2	-3
1	2	-3	0

$$P(x) = (x-1)(x^2+2x-3) = (x-1)(x-1)(x+3) = (x-1)^2(x+3).$$

Les zéros sont 1 et -3 :

x		-3		1	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

ou



Donc $P(x) < 0$ pour $x \in]-\infty ; -3[$

Exercice 5 (8 points)

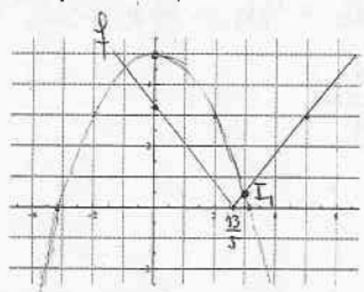
On donne les fonctions $f : x \longmapsto y = |\frac{5}{4}x - \frac{13}{4}|$ et $g : x \longmapsto y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

a) Déterminer les points d'intersection de chacune de ces deux fonctions avec les axes Ox et Oy, puis représenter graphiquement ces deux fonctions.

$f \cap Oy : (0 ; \frac{13}{4})$; $f \cap Ox : \frac{5}{4}x - \frac{13}{4} = 0 \Rightarrow 5x - 13 = 0$

$f : (5 ; 3)$ $\Rightarrow (\frac{13}{5} ; 0)$

pointe du V.



$g \cap Oy : (0 ; 5)$: sommet de la parabole

$g \cap Ox : \frac{1}{2}x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x$ [illegible] $\sqrt{10}$

$(\pm\sqrt{10} ; 0)$ où $\sqrt{10} \cong 3,16$

$g : (\pm 2 ; 3)$

b) **Calculer** les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g.

1) Si $x \geq \frac{13}{5}$, alors $f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{13}{4} = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

$$5x - 13 = -2x^2 + 20$$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 33 = 0$; $\Delta = 289 = 17^2$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{4} = \begin{cases} 3 \; (\geq \frac{13}{5}) \\ \cancel{-\frac{11}{2}} \; (\leq \frac{13}{5}) \end{cases}$$

donc $\underbrace{I_1(3 ; \frac{1}{2})}_{f(3) = g(3)}$

2) Si $x \leq \frac{13}{5}$, alors $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{4} = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

$$-5x + 13 = -2x^2 + 20$$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0$; $\Delta = 81$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 9}{4} = \begin{cases} \cancel{\frac{7}{2}} \; (> \frac{13}{5}) \\ -1 \; (< \frac{13}{5}) \end{cases}$$

donc $\underbrace{I_2(-1 ; \frac{9}{2})}_{f(-1) = g(-1)}$