LDDR- Niveau 2 : TE 14 – Fonctions- solutions

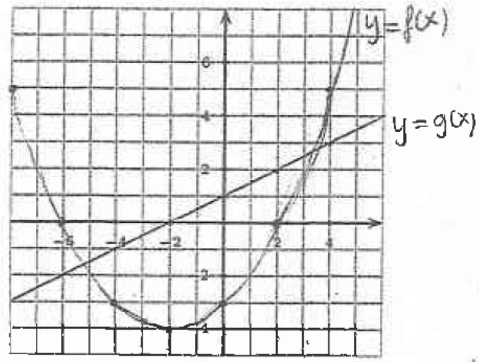
LDDR / Maths II juin 2019

TE 6 : Fonctions

Nom : ....

points	note

Exercice 1. [~30 minutes, 9 pts]



On considère $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a) Déterminer le sommet de la parabole $y = f(x)$, ses points d'intersection avec les axes et indiquer deux autres points à coordonnées entières. Dessiner la parabole.

$\Delta(\frac{1}{4}; 1; -3) = 1 - (-3) = 4$

$x = \frac{-1 \pm 2}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm 4}{1} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$ $I_{x1}(2;0)$ $I_{x2}(-6;0)$

$x_s = -2$, $y_s = "\frac{-\Delta}{4a}" = \frac{-4}{1} = -4$, $S(-2;-4)$

$f(0) = -3$ donc $I_y(0;-3)$, $A(-8;5)$, $B(-4;-3)$, $C(4;5)$, $D(6;12)$

b) Dessiner la droite $d : y = g(x)$ puis déterminer par calculs l'équation de la droite parallèle à d qui touche la parabole $y = f(x)$ en un seul point.

droite d' : $y = \frac{1}{2}x + h$ tangente à la parabole

$\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = \frac{1}{2}x + h$, $x^2 + 4x - 12 = 2x + 4h$, $x^2 + 2x - 12 - 4h = 0$

Cette équation doit avoir une seule solution x ; donc

$\Delta(1; 2; -12-4h) = 0$, $4 - 4(-12-4h) = 0$, $1 - (-12-4h) = 0$

$13 + 4h = 0$, $4h = -13$, $h = -\frac{13}{4}$

la droite cherchée est d' : $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$

c) Exprimer $(g \circ g)(x)$ sous forme ordonnée et réduite.

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 1) + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

d) Exprimer précisément l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}$ à l'aide d'un intervalle.

$f(x) = g(x)$, $\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = \frac{1}{2}x + 1$, $x^2 + 4x - 12 = 2x + 4$

$x^2 + 2x - 16 = 0$, $\Delta(1; 2; -16) = 4 - (-64) = 68 = 4 \cdot 17$

$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}$ Dessin $\longrightarrow$ $E = \,]-1-\sqrt{17}; -1+\sqrt{17}[$

Exercice 2. [~12 minutes, 4 pts]

Une parabole passe par $P(0;-6)$ et son sommet est $S(4;2)$. Déterminer son équation développée et son équation factorisée.

$y = a(x-4)^2+2$, $P \in$ parabole $\rightarrow -6 = a\cdot 16+2$, $16a = -8$, $a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}(x-4)^2+2 = -\frac{1}{2}(x^2-8x+16)+2 = -\frac{1}{2}x^2+4x-8+2 = -\frac{1}{2}x^2+4x-6$

zéros : $-\frac{1}{2}(x-4)^2+2 = 0$, $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 2$, $(x-4)^2 = 4$, $x-4 = \pm 2$

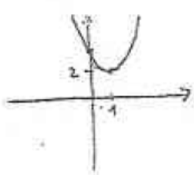
$x = 4 \pm 2 = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

$y = -\frac{1}{2}(x-6)(x-2)$

Exercice 3. [~15 minutes, 3.5 pts]

Trouver des ensembles D et A pour que l'expression $f(x) = (x-1)^2+2$ définisse une fonction bijective $f: D \longrightarrow A$ et déterminer l'expression $f^{-1}(x)$ de la fonction réciproque.

Le graphe de f est une parabole "U" de sommet $S(1;2)$



$D = [1;\infty[$, $A = [2;\infty[$ $\quad$ $x-1 \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$

$y = (x-1)^2+2$, $y-2 = (x-1)^2$, $x-1 = \pm\sqrt{y-2}$

$x = 1+\sqrt{y-2}$

$$[1;\infty[\; \underset{f^{-1}:\, x \longmapsto 1+\sqrt{x-2}}{\overset{f:\, x \longmapsto (x-1)^2+2}{\rightleftarrows}} \; [2;\infty[$$

Exercice 4. [~15 minutes, 3.5 pts]

Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient l'inéquation $\dfrac{x+2}{x+1} \geqslant \dfrac{3x+6}{3x+8}$.

$\frac{x+2}{x+1} - \frac{3x+6}{3x+8} \geqslant 0$

$f(x) = \frac{(x+2)(3x+8)-(3x+6)(x+1)}{(x+1)(3x+8)} = \frac{3x^2+14x+16-(3x^2+9x+6)}{(x+1)(3x+8)}$

$= \frac{\cancel{3x^2}+14x+16-\cancel{3x^2}-9x-6}{(x+1)(3x+8)} = \frac{5x+10}{(x+1)(3x+8)} = \frac{5(x+2)}{(x+1)(3x+8)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{8}{3}\}$, $Z_f = \{-2\}$

x		$-\frac{8}{3}$		-2		-1	
$f(x)$	$-$	↯	$+$	0	$-$	↯	$+$

$f(x) \geqslant 0$ lorsque $x \in \left]-\frac{8}{3}; -2\right] \cup \left]-1; \infty\right[$