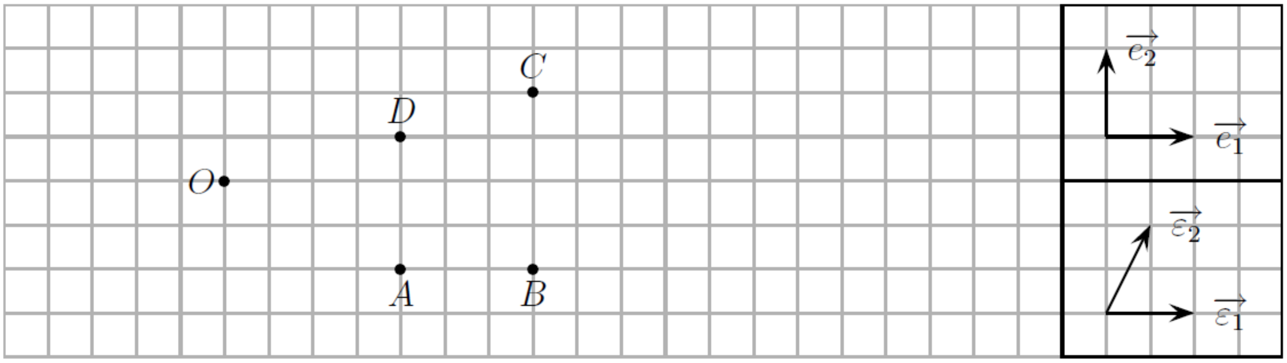
LDDR – Niveau 1 : Géométrie plane

3. Géométrie plane

1 On considère cinq points dans le plan : O, A, B, C et D.



a) Placer les points P_i ($i = 1, ..., 6$) définis par les relations vectorielles suivantes

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{OP_2} = 2\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AP_4} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BP_5} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{CP_6} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{AB}$$

b) Dans chacune des bases $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ et $(\overrightarrow{\varepsilon_1}; \overrightarrow{\varepsilon_2})$ exprimer les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{e_1}, \quad \overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{\varepsilon_1} + 8\overrightarrow{\varepsilon_2}, \quad \overrightarrow{w} = 4\,\overrightarrow{OB} - 6\,\overrightarrow{OD}$$

2 Simplifier au maximum les vecteurs $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$.

3 On considère le triangle de sommets $A(-4;1)$, $B(1;3)$ et $C(-3;5)$. Déterminer les milieux (A', B' et C') de chacun de ses côtés ainsi que son centre de gravité.

4 Trouver les sommets du triangle ABC dont les milieux des côtés sont $A'(2;-1)$, $B'(-1;4)$ et $C'(-2;2)$. Calculer le centre de gravité du triangle ABC.

5 Montrer que si A', B' et C' désignent les milieux des côtés d'un triangle ABC, alors les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

6 Un triangle est donné par le sommet $A(1;2)$, son centre de gravité $G(5;7)$ et le vecteur $\overrightarrow{BC} = \binom{-4}{6}$. Déterminer les sommets manquants B et C.

7 On considère un triangle ABC avec les notations d'usage. Dans chacun des cas suivants, exprimer le premier vecteur indiqué à l'aide des autres.

a) $\overrightarrow{OA'}$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ b) $\overrightarrow{OA'}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$ c) $\overrightarrow{OB}$ et $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OG})$

8 On considère la droite d qui passe par les points $A(4;1)$ et $B(1;2)$.

a) Trouver le vecteur directeur dont la deuxième composante vaut 5.

b) Parmi les points $C(7;2)$, $D(-11;6)$ et $E(13;-2)$, déterminer ceux qui sont situés sur la droite d.

c) Trouver les coordonnées manquantes des points suivants de sorte qu'ils soient situés sur la droite d : $P_1(0;\ldots)$, $P_2(\ldots;0)$, $P_3(10;\ldots)$, $P_4(\ldots;-12)$

9 Dans le schéma ci-dessus, représenter les points associés aux valeurs $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$, $\lambda < 0$ et $\lambda > 1$. Trouver des équations paramétriques pour la droite d.

10 On considère le triangle de sommets $A(-4;1)$, $B(2;-3)$ et $C(5;4)$. Trouver une équation cartésienne et l'équation réduite de ses trois médianes, ainsi que des droites d_A, d_B et d_C qui passent par un sommet parallèlement au côté opposé.

11 Chercher l'équation réduite des droites suivantes

d_1 passe par $(-1;6)$ avec pente 4 $\qquad$ d_2 passe par $(5;2)$ et $(1;6)$

d_3 passe par $(2;-5)$ et $(2;8)$ $\qquad$ d_4 passe par $(3;-5)$ et $(-1;-2)$

12 Calculer tous les points d'intersection possibles entre les quatre droites suivantes.

$$d_1 : x + 2y + 3 = 0 \qquad d_3 : \begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \qquad d_4 : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$d_2 : 2x - 3y + 5 = 0$$

13 Trouver une équation de la droite d qui passe par $A(47;-206)$ et $B(607;4)$. Déterminer l'intersection de d avec chaque axe et avec la droite d' qui passe par les points A' et B', obtenus en échangeant les coordonnées de A et celles de B.

14 Déterminer les coefficients b et c de sorte que les équations $2x + 7y + 13 = 0$ et $5x + by + c = 0$ décrivent la même droite. Que dire sur ces coefficients si les droites décrites sont strictement parallèles ?

Exercice de révision I

Compléter les tableaux de synthèse donnés en annexe pour les droites suivantes :

$d_1 : \{x = 2 + 2\lambda,\ y = -3 + \lambda$ $\qquad$ $d_2 : A(3;4)$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $d_3 : A(0;1)$ et $B(3;0)$

$d_4 : A(2;18)$ et $m = -2$ $\qquad$ $d_5 : A(1;-5)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $d_6 : y = 3x + 5$

Exercice de révision II

On considère la droite d : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -4 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$

a) Indiquer si les points $A(-7; 2)$, $B(-109; 32)$ et $C(-139; 43)$ sont sur d ou non.

b) Déterminer sur la droite d les points $P_1(-3; \ldots)$, $P_2(\ldots; 4)$ et P_3 dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

c) Trouver une équation cartésienne pour d et indiquer la pente de cette droite.

d) Trouver la pente de la droite d' : $3x+8y+3 = 0$ et déduire que d et d' sont sécantes.

e) Déterminer le point d'intersection entre d et d'.

f) Trouver une équation cartésienne pour la droite parallèle à d' passant par $P(5; -1)$.

Exercice de révision III

On considère le triangle de sommets $A(2; 1)$, $B(4; -6)$ et $C(-2; 4)$.

a) Trouver des équations paramétriques pour la médiane m_A, une équation cartésienne de la médiane m_B, ainsi que l'équation réduite de la droite d_C passant par C parallèlement au côté AB.

b) Calculer tous les points d'intersection entre les trois droites ci-dessus.

c) Que représente le point d'intersection entre les droites m_A et m_B ?

d) Calculer A^* et B^*, points symétriques de A et B par rapport à C.

Exercice de révision IV

On considère dans une base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Expliquer pourquoi $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})$ est une base et exprimer $\overrightarrow{v_3}$ dans cette base

b) Trouver les vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ tels que $\overrightarrow{w_1} // \overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{w_2} // \overrightarrow{v_2}$ et $3\overrightarrow{w_1} + 2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_3}$.

15 On considère le triangle de sommets $A(1; -4)$, $B(-8; 5)$ et $C(-11; 2)$. Calculer la longueur de chaque côté et montrer que le triangle est rectangle.

La *médiatrice* d'un segment AB est l'ensemble des points P situés à même distance de A et de B, c'est-à-dire tels que $\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B)$.

16 Trouver une équation cartésienne pour chaque médiatrice du triangle ABC de l'exercice précédent et montrer que ces médiatrices se coupent en un seul point.

17 Trouver les vecteurs $\overrightarrow{u}$ qui ont la même direction et le même sens que $\overrightarrow{v} = \binom{3}{-4}$ mais de longueur $\|\overrightarrow{u_1}\| = 10$, respectivement $\|\overrightarrow{u_2}\| = 7$ et $\|\overrightarrow{u_3}\| = 13.5$.

18 Calculer tous les angles $\alpha_{ij} = \sphericalangle(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j})$ entre les vecteurs suivants.

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

19 Trouver une équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2;4)$, et qui est perpendiculaire à la droite $d : 3x - 5y + 9 = 0$. Idem avec le point $B(6;-7)$

20 Trouver le plus petit angle entre la droite $d_1 : 3x - 5y + 9 = 0$ et...

a) la droite $d_2 : y = -x + 7$ b) la médiatrice m_{AB} avec $A(2;4)$ et $B(6;-7)$

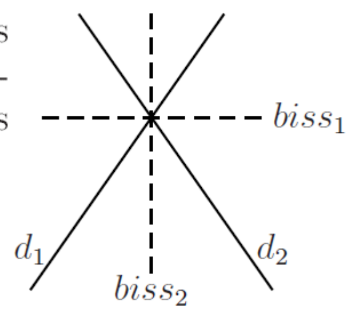
21 Calculer les projections orthogonales des points $A(6;3)$ et $B(5;-2)$ sur la droite $d : 2x - 3y + 10 = 0$. En déduire les distances $\text{dist}(A, d)$ et $\text{dist}(B, d)$.

22 Estimer par dessin puis calculer la projection de $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Faire de même pour la projection de $\overrightarrow{v_2}$ sur $\overrightarrow{v_1}$.

23 Calculer la distance de la droite $d : 3x - 4y - 11 = 0$ aux points $P_1(0;0)$, $P_2(-8;5)$, $P_3(7;-2)$ et $P_4(5;1)$. Déterminer les droites situées à distance 2 de la droite d.

24 On considère les droites $d_1 : 6x - 15y - 17 = 0$ et $d_2 : 10x - 25y + 43 = 0$. Montrer qu'elles sont parallèles, calculer la distance qui les sépare et déterminer la droite située à la même distance de l'une et de l'autre.

25 Les *bissectrices* de deux droites d_1 et d_2 sont constituées des points P situés à la même distance de d_1 que de d_2, c'est-à-dire tels que $\text{dist}(P, d_1) = \text{dist}(P, d_2)$. Trouver des équations pour les bissectrices des droites suivantes



a) $d_1 : 4x + 7y - 9 = 0$ et $d_2 : x - 8y + 8 = 0$

b) $d_1 : x + 2y - 3 = 0$ et $d_2 : 11x - 2y - 9 = 0$

26 Etablir l'équation des cercles suivants et calculer les points d'intersection avec les axes de coordonnées. Vérifier les résultats par dessin (dans un même repère).

a) $P_0(-1;2)$ et $r = 3$ b) $P_0(3;-5)$ et $r = \sqrt{18}$ c) $P_0(6;2)$ et $r = 2$.

27 Trouver l'équation du cercle qui passe par les points $A(5;4)$ et $B(-1;6)$ diamétralement opposés. Donner deux autres paires de points diamétralement opposés.

28 Trouver le centre et le rayon des cercles suivants.

$\mathcal{C}_1 : (x+4)^2 + (y-3)^2 = 100$ $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

$\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 14x - 10y + 70 = 0$ $\mathcal{C}_4 : 3x^2 + 3y^2 + 16x - 12y = 0$

$\mathcal{C}_5 : x^2 + y^2 - 4x + 28y + 150 = 0$ $\mathcal{C}_6 : 4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 59 = 0$

29 Déterminer la position des points $A(1;-11)$, $B(11;-6)$, $C(6;14)$ et $D(9;14)$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$ centré en $P_0(1;2)$ et passant par $P(13;-3)$.

30 Trouver les points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$ et les droites $d_1 : 2x - y + 10 = 0$, $d_2 : x - 3y + 8 = 0$, $d_3 : 4x + 3y - 19 = 0$.

31 Déterminer les points d'intersection entre toutes les paires de cercles suivants
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 25$, $\mathcal{C}_2 : (x-9)^2 + (y+2)^2 = 40$, $\mathcal{C}_3 : (x-6)^2 + (y-7)^2 = 10$.

32 Trouver les droites $y = mx + 5$ qui sont tangentes au cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 16$. Déterminer le point de tangence pour chacune d'elles.

33 Déterminer l'équation du cercle centré au point $P_0(3;-1)$ et tangent à la droite $d_1 : 4x - 3y - 3 = 0$. Traiter le même problème avec la droite $d_2 : y = x - 2$.

34 Trouver l'équation du cercle qui passe par les points $A(-4;-3)$, $B(0;5)$ et $C(6;-13)$ ainsi que les tangentes au cercle en chacun de ces trois points (ces tangentes peuvent être notées respectivement t_A, t_B et t_C).

35 Exercices de révision

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 10y + 12 = 0$. Trouver des équations pour les tangentes en ses points $(6;\ldots)$, ainsi que pour ses tangentes parallèles à la droite $d : x - 4y + 10 = 0$.

b) Trouver l'équation du cercle qui passe par $A(-1;4)$, $B(7;6)$ et $C(-2;3)$ en calculant une intersection de médiatrices. Déterminer les mesures des côtés du triangle ABC ainsi que celle de son plus grand angle.

c) Déterminer la plus courte distance entre la droite $d : x - 3y + 7 = 0$ et le cercle $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$. Trouver le point de la droite le plus proche du cercle ainsi que le point du cercle le plus proche de la droite.

d) Trouver l'équation cartésienne du cercle centré au point $M(5;-1)$ et qui est tangent à la droite $t : 3x + 4y - 36 = 0$. Déterminer les points d'intersection de ce cercle avec la droite $d : 2x + 3y - 8 = 0$.