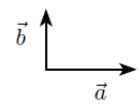
4

Géométrie plane

Exercice 4.1

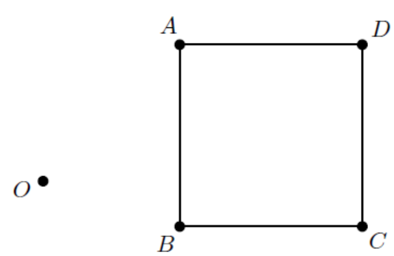
Dans la base $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$, on a $\vec{c} = -5\vec{a} + 4\vec{b}$ et $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ y \end{smallmatrix} \right)$. Dessiner $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sachant qu'ils sont linéairement dépendants. Calculer ensuite la valeur de la composante inconnue $y \in \mathbb{R}$.



Exercice 4.2

Soit $ABCD$ un carré. Placer les points E, F et G de sorte que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$



Dès lors, la base est $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

Exercice 4.3

Soient les vecteurs $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 6 \end{smallmatrix} \right)$.

a. Compléter $\vec{a} \,/\!\!/ \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ \dots \end{smallmatrix} \right)$ $\qquad \vec{b} \,/\!\!/ \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ \dots \end{smallmatrix} \right)$ $\qquad \vec{c} \,/\!\!/ \left(\text{–ï1} \right)$

b. Calculer les composantes des vecteurs :

$2\vec{a} - 3\vec{b} \qquad \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c} \qquad -4\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + 3\left(-\vec{b} + \vec{c}\right)$

c. Montrer que $\left\{\vec{a};\vec{b}\right\}$ est une base. Trouver les composantes de $\vec{c}$ dans la base $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Aide : Chercher α, β tels que $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ et résoudre un système 2x2.

d. Ecrire $\vec{b}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

Exercice 4.4

Montrer que les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. Décomposer, par calcul et par dessin, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Déterminer m tel que $\begin{pmatrix} 7 \\ m \end{pmatrix} /\!/ \vec{a}$ et n tel que $\begin{pmatrix} n \\ -12 \end{pmatrix}$ et $(\vec{a}+\vec{b})$ soient liés (= linéairement dépendants).

Exercice 4.5

Déterminer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $\vec{a} /\!/ \vec{e_1}$, $\vec{b} /\!/ (2\vec{e_1} + \vec{e_2})$ et $3\vec{a} + \vec{b} = 7\vec{e_1} - \vec{e_2}$.

Exercice 4.6

Soient $A(3;4)$ et $B(-2;1)$. D'autres points sont donnés par :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA},\ \ \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{OA},\ \ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OB},\ \ \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{OB}$$

Dessiner tous ces points. Utiliser ensuite la relation de Chasles pour calculer les coordonnées des points C, D, E, F, G et H.

Exercice 4.7

Répondre aux questions suivantes :

a. Compléter à l'aide de la relation de Chasles :

$A(7;5)$	$B\,(-4;1)$	$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$
$A\,(\ldots;\ldots)$	$B\left(2;\frac{1}{3}\right)$	$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$A\,(\ldots;-2)$	$B\,(0;\ldots)$	$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ 5 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$
$A\left(\frac{1}{2};3\right)$	$B\,(\ldots;-1)$	$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} /\!/ \vec{e_2}$

b. Calculer les coordonnées du point milieu du segment AB avec $A(2;-3)$ et $B(-1;-2)$

c. Déterminer les coordonnées du point C, **le symétrique** de B par rapport à A. Faire un dessin.

d. Déterminer les coordonnées de $P'(x';y')$, le symétrique du point $P\,(x;y)$ par rapport à $M\,(a;b)$.

Exercice 4.8

Soient $A(4;-6)$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$, construire les points A, B, C, D, E et calculer leurs coordonnées.

Exercice 4.9

Considérons les points $A(-2;5)$, $B(1;-3)$ et $C\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

a. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme de sommets $ABCD$.

b. Calculer les coordonnées du centre de gravité M du parallélogramme.

Exercice 4.10

Compléter (M_{AB} est le point milieu du segment AB) :

A	$(4;9)$	$(0.5;-2)$	$(...;...)$	$(2;7)$	$(...;...)$	$(...;...)$
B	$(-2;5)$	$(...;...)$	$(0;7)$	$(...;...)$	$(-5.5;17)$	$(...;...)$
M_{AB}	$(...;...)$	$(3;3.5)$	$(-6;2)$	$(...;...)$	$(...;...)$	$(1;-5)$
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.11

Un parallélogramme de sommets $ABCD$ est donné par les informations suivantes : $A(-3;2)$, centre $M(-1;0)$, $\overrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM} \mathbin{/\!/} \vec{e_2}$.

a. Calculer les coordonnées des sommets B, C et D.

b. Vérifier vos réponses à l'aide d'un dessin.

Exercice 4.12

Soit un triangle donné par $A(3;2)$, $B(-1;4)$ et $C(0;-2)$. On considère une homothétie de centre $P(-2;1)$ et de facteur $k = -2$. Calculer les coordonnées des images A', B' et C' et vérifier vos réponses à l'aide d'un dessin.

Exercice 4.13

a. Déterminer le centre de gravité du triangle de sommets $A(-3;7)$, $B(2;4)$ et $C(-5;1)$.

b. Soit $G(5;2)$, le centre de gravité du triangle ABD, déterminer les coordonnées de D.

Exercice 4.14

On envisage dans le plan les points $P(-2+3\lambda\,;\,5-4\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées des points suivants :

a. A, obtenu en posant $\lambda = 0$

b. B obtenu en posant $\lambda = 1$

c. C d'abscisse nulle.

d. D d'ordonnée nulle

e. E d'ordonnée double de l'abscisse

f. F d'ordonnée 7

Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$. Que peut-on en dire ? Placer ces 6 points dans un repère. Quelle figure géométrique décrivent-ils ?

Exercice 4.15

a. d_1 passe par $A(-2\,;3)$ et $B(8\,;5)$.

b. d_2 passe par $A(-4\,;1)$ et est parallèle à l'axe Ox.

c. d_3 passe par O et est parallèle au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.16

a. Trouver un point et un vecteur directeur puis représenter les droites suivantes ci-dessous

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 6 + 2\mu \end{cases}$$

b. Ces droites se coupent en un point de coordonnées : $I($ …... ; …...).

c. Comment peut-on savoir que ces droites sont sécantes sans les dessiner ?

d. Ecrire les équations cartésiennes de ces droites

Exercice 4.17

Soient les droites $d_1 :\ -x + 2y + 3 = 0$ et $d_2 :\ 3x - 4y - 12 = 0$.

a. Calculer leur point d'abscisse nulle et celui d'ordonnée nulle.

b. Indiquer pour chacune un vecteur directeur.

c. Quelle est la position relative de ces droites ? Pourquoi ?

d. Représenter proprement ces droites.

e. Déterminer par calcul les coordonnées de leur intersection. Vérifier sur le dessin.

f. Déterminer les équations paramétriques pour chacune des droites

Exercice 4.18

Soit le triangle ABC par $A(-5\,;\,2)$, $B(2\,;\,7)$et $C(3\,;\,-4)$.

a. Déterminer l'équation de la droite passant par A et A', le milieu de BC : c'est la médiane passant par A, que l'on note m_A.

b. L'écrire sous forme paramétrique et cartésienne, avec des coefficients tous entiers.

c. Le point $D\,(10\,;\,1)$, appartient-il à la médiane ? Répondre à l'aide des deux formes de la droite.

Exercice 4.19

Compléter le tableau ci-dessous :

Equations paramétriques	Equation cartésienne	Un point	un vecteur directeur
$\begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$			
	$x + 4y - 10 = 0$		
		$(-7;1)$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
		$(0;9)$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.20

Dans chaque cas, calculer les coordonnées du point d'intersection des droites données :

a. $d_1 : \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad d_2 : \begin{cases} x = -4 - \mu \\ y = 5 + 7\mu \end{cases}$

b. $d_1 : \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad d_2 : x + 8y - 5 = 0$

c. $d_1 : 3x - 2y + 6 = 0$ $\quad d_2 : x + 8y - 5 = 0$

Exercice 4.21

Le triangle ABC est donné par les informations suivantes :

$A(1;1)$ $\quad$ Centre de gravité $G\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{BC} \,/\!/\, \vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad d_{AB} : 5x + 3y - 8 = 0$

Construire et calculer les coordonnées de B et C.

$B(4;-4)$ $\quad C(2;4)$

Exercice 4.22

Un carré $ABCD$ est donné par les informations suivantes :

$$D(-7\,;2) \qquad C \in d_1 : \; 3x + y + 2 = 0 \qquad C \in d_2 : \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

Construire le carré et calculer les coordonnées des sommets A, B et C.

Exercice 4.23

Le triangle ABC est donné par $A(3\,;\,1)$, le centre de gravité $G(2\,;3)$ et $C'(4\,;4)$, le point milieu du segment AB.

a. **Indiquer la marche à suivre** pour déterminer les coordonnées des sommets B et C. Les déterminer ensuite.

b. Trouver une équation cartésienne de la médiane m_C

c. Trouver des équations paramétriques du côté a du triangle (passe par B et C)

d. Faire un dessin de contrôle

Exercice 4.24

Soit la droite paramétrée d_m : $4x - my + 2 = 0$. Pour quelle valeur de m la droite d_m :

a. Passe-t-elle par le point $A(2\,;-3)$?

b. Est-elle parallèle à l'axe Oy ?

c. A-t-elle le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ?

d. Est-elle perpendiculaire à la droite passant par $B(5\,;4)$ et $C(7\,;-1)$?

Exercice 4.25

Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC sachant que
$d_{AB} : 3x - 5y + 1 = 0$, $d_{AC} : x - 9y - 29 = 0$, $C\,(11;?)$ et $\overrightarrow{BC} \parallel \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 4.26

Soient les vecteurs $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Calculer les produits scalaires $\vec{a} \bullet \vec{b}$, $\vec{b} \bullet \vec{c}$, $\vec{b} \bullet \vec{d}$.

b. Calculer la norme des quatre vecteurs donnés.

c. Trouver un vecteur $\vec{e}$ orthogonal à $\vec{a}$ et de même longueur que $\vec{a}$.

d. Trouver un vecteur unité $\vec{u}$ de même direction et de même sens que $\vec{c}$.

e. Quel vecteur forme un angle obtus avec le vecteur $\vec{b}$?

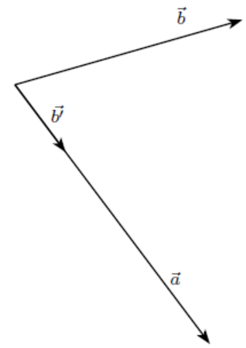
f. Le vecteur $\vec{f} = \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ est perpendiculaire à $\vec{c}$. Quelle est la valeur de f_1 ?

Exercice 4.27

Le triangle de sommets $A\,(2;8)$, $B\,(-4;3)$ et $C\,(4;6)$ est il obtus, aigu ou droit ? Calculer son périmètre. Calculer les angles du triangle.

Exercice 4.28

Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.



a. Dessiner $\vec{b'}$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

b. Calculer la norme de $\vec{b'}$ (Projection scalaire).

c. Calculer l'aire du triangle OAB (2 méthodes).

d. Déterminer les composantes de $\vec{b'}$ (Projection vectorielle).

Exercice 4.29

a. Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$. Trouver x afin que $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b. Soient les vecteurs $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ 2x-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Trouver x afin que $\vec{c} \perp \vec{d}$.

Exercice 4.30

Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Les représenter soigneusement.

a. Dessiner $\vec{b'}$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

b. Calculer la norme de $\vec{b'}$ (Projection scalaire).

c. Calculer l'aire du triangle OAB (2 méthodes).

d. Déterminer les composantes de $\vec{b'}$ (Projection vectorielle).

Exercice 4.31

Soient $A(-1;-2)$ et $B(7;4)$ deux sommets du triangle isocèle ABC de base AB. Déterminer les coordonnées de C de sorte que l'aire du triangle soit 75.

Exercice 4.32

Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.Calculer les angles

a. $\gamma = \angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ b. $\beta = \angle\left(\vec{a};\vec{c}\right)$ c. $\alpha = \angle\left(\vec{b};\vec{c}\right)$

Exercice 4.33

Calculer les côtés, les angles, les hauteurs et l'aire du triangle de sommets $A(-3;-2)$, $B(6;4)$ et $C(1;8)$

Exercice 4.34

Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ qui forme un angle de 60° avec le vecteur $\vec{a}$.

Exercice 4.35

Déterminer l'angle entre les droites $d_1 : 5x - 2y + 8 = 0$ et $d_2 : 3y = 4x - 1$

Exercice 4.36

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points $P\,(x; y)$ tels que $\vec{AP} \perp \vec{n}$.

a. $A\,(3; 1)$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b. $A\,(-5; 2)$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.37

Déterminer l'équation cartésienne des droites ci-dessous :

a. a passant par $A(-2; 3)$, de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b. b passant par $B(3; -1)$, de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c. c passant par $C(-6; 0)$, perpendiculaire à la droite a.

d. d passant par $D(5; 2)$, parallèle à la droite b.

Exercice 4.38

a. Trouver un vecteur directeur et deux points de $d_1 : 3x - 4y - 12 = 0$

b. Trouver un vecteur normal et un point de $d_2 : 5x + 3y + 9 = 0$

c. Trouver un vecteur normal de d_3 passant par $A(-2; 5)$ et $B\,(4; 1)$

Exercice 4.39

On donne la droite $d : x + 4y - 5 = 0$ et les points $A(-1; 4)$ et $B\,(5; 2)$.

a. Trouver le(s) point(s) $C \in d$ de manière que le triangle ABC soit rectangle.

b. Trouver le(s) point(s) $C \in d$ de manière que le triangle ABC soit isocèle en C.

c. Trouver le(s) point(s) $C \in d$ de manière à ce que l'aire du triangle ABC soit de 6.

Exercice 4.40

Soit la droite $a :\ 3x - 4y - 17 = 0$.

a. Déterminer l'équation cartésienne de b perpendiculaire à a et passant par $B\,(-3\,;6)$.

b. Calculer les coordonnées de l'intersection entre a et b.

c. Calculer les coordonnées du point C, symétrique de B par rapport à la droite a.

Exercice 4.41

On considère le triangle de sommets $A(6;0)$, $B(0;4)$ et $C(-2;0)$.

a. Trouver une équation cartésienne des médiatrices m_{AB}, m_{AC} et m_{BC}.

b. Calculer les coordonnées de M le point d'intersection des 3 médiatrices.

c. Déterminer le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC. Dessiner la situation (unité : 2 carrés).

Exercice 4.42

On considère la droite d donnée par son équation $4x - 3y - 24 = 0$.

a. Calculer la distance de d aux points $O\,(0;0)\,, B\,(11;-10)$ et $C\,(9;4)$.

b. Trouver une équation cartésienne des droites e et f situées à distance 2 de la droite d.

c. Esquisser la situation.

Exercice 4.43

Soient $a : 4x + 3y - 12 = 0$ et $b : 7x - y - 46 = 0$. Calculer les coordonnées des points de b à distance 5 de la droite a. Commencer par résoudre le problème par dessin.

Exercice 4.44

Soient les droites $a : 4x + 3y - 24 = 0$ et b parallèle à a passant par $B\,(0;13)$.

a. Calculer la distance entre a et b.

b. Trouver une équation cartésienne de la droite c formée des points équidistants de a et b.

c. Trouver une équation cartésienne de la droite d dont la distance à a est le double de la distance à b. Faire un dessin.

Exercice 4.45

Soient les droites $a : 3x - 4y + 12 = 0$ et $b : 12x + 5y - 15 = 0$. Trouver une équation cartésienne des droites c et d, les bissectrices de a et b. Faire un dessin.

Exercice 4.46

Soit le point $M\,(5\,;\,3)$.

a. Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points $P\,(x\,;y)$ tels que $d\,(M\,,\,P) = 5$

b. Parmi ces points, calculer les abscisses de ceux qui se trouvent sur l'axe Ox

Exercice 4.47

Les équations suivantes caractérisent-elles des cercles ? Si c'est le cas, donner les coordonnées du centre et le rayon.

a. $x^2 + y^2 - 14x - 2y - 126 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 123 = 0$

c. $x^2 + y^2 + 8x - 16y + 80 = 0$

d. $3x^2 + 3y^2 + 7x - 10 = 0$

Exercice 4.48

a. Ecrire l'équation du cercle C de centre $C(-7; 4)$ et rayon $r = 13$.

b. Calculer a_1 (> 0) et b_2 (< 0) sachant que les points $A(a_1; 9)$ et $B(-2; b_2)$ appartiennent au cercle

c. Trouver l'équation de la médiatrice m du segment AB.

d. Vérifier que le centre du cercle C est sur la médiatrice m.

Exercice 4.49

Déterminer l'équation du cercle Γ passant par $A(-3; 3)$, $B(-1; -3)$ et $C(5; 3)$.

Exercice 4.50

Soit le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 - 10x - 8y - 8 = 0$.

a. Etudier la position relative, par rapport à Γ, des points $P_1\,(3; -3)$, $P_2\,(0; 6)$ et $P_3\left(5 - \sqrt{13}; 10\right)$.

b. Déterminer les équations des tangentes à Γ parallèles à $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nommez-les t_1 et t_2. Calculer les coordonnées des points de contact T_1 et T_2.

c. Déterminer la position relative de $d : 3x - 2y + 17 = 0$ et Γ. Calculer les éventuelles intersections.

Exercice 4.51

a. Trouver l'équation du cercle Π centré sur l'axe O_y et qui passe par $A\,(1; 2)$ et $B\,(7; 4)$

b. Trouver l'équation de la droite d tangente au cercle Π et passant par $B\,(7; 4)$.

c. Trouver l'angle entre la droite d et l'axe O_y

Exercice 4.52

Déterminer l'équation de la tangente à $\Gamma : x^2 + y^2 + 10x + 2y + 13 = 0$ au point $T\,(-3; 2)$.

Exercice 4.53

Déterminer les intersections entre la droite $d : x + y - 4 = 0$ et le cercle $\Gamma : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$.

Exercice 4.54

Déterminer l'équation du cercle centré en $M\,(-2;3)$ et tangent à la droite $d : x + 2y = 0$.

Exercice 4.55

Trouver l'équation des droites tangentes au cercle $\Gamma : (x-2)^2 + (y+5)^2 - 17 = 0$ qui sont parallèles à la droite $d : x - 4y + 10 = 0$.

Exercice 4.56

Soient les points $P\,(-2;7)$, $Q\,(2;3)$ et $R\,(4;5)$. Prouver que le triangle PQR est droit. Déterminer l'équation du cercle passant par les points P, Q et R.

Exercice 4.57

Déterminer le centre et le rayon du cercle inscrit au triangle formé par les droites $d_1 : x + 2 = 0$, $d_2 : y - 3 = 0$ et $d_3 : 5x + 12y - 60 = 0$.

Exercice 4.58

Soient les points $A(-3;3)$ et $B(4;0)$. Déterminer les coordonnées des points $P_1, P_2 \in d : y = x$ de sorte que le triangle ABP soit un triangle isocèle en B. Calculer ensuite l'aire du quadrilatère AP_1BP_2.

Exercice 4.59

Pour quelles valeurs de m la droite d'équation $y = mx$

a. coupe le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$?

b. est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$?

Exercice 4.60

Déterminer l'équation des cercles centrés sur la droite $d : 3x + 7y - 39 = 0$ et tangents aux droites $a : 3x - 4y + 12 = 0$ et $b : x = 0$.

Exercice 4.61

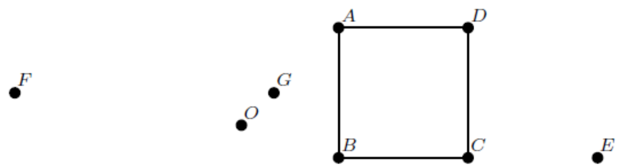
Dans chaque cas, déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles donnés :

a. $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 25$ et $\Gamma_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 29$

b. $\Gamma_1 : (x+4)^2 + (y+5)^2 = 194$ et $\Gamma_2 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 40$

4.1 $y = -2.4$

4.2



4.3

a. $\vec{a} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 7 \\ -17.5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 11/3 \\ -11 \end{pmatrix}$

b. $2\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 31/3 \end{pmatrix}$ $\quad -4\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + 3\left(-\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -20 \\ 7 \end{pmatrix}$

c. $\vec{c} = \frac{2}{23}\vec{a} + \frac{26}{23}\vec{b}$

d. $\vec{b} = -\frac{1}{13}\vec{a} + \frac{23}{26}\vec{c}$

4.4 $\vec{c} = -\frac{29}{13}\vec{a} + \frac{20}{13}\vec{b}$ $\quad m = -10.5$ $\quad n = 1.5$

4.5 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.6 $C(-5;-3)$ $\quad D(5;3)$ $\quad E(1;5)$ $\quad F = C$ $\quad G = E$ $\quad H = D$

4.7

a.

$$\begin{array}{llcl}
A(7;5) & B(-4;1) & \longrightarrow & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} \\
A(5;-5/3) & B\left(2;\frac{1}{3}\right) & \longrightarrow & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
A(8.75;-2) & B(0;3) & \longrightarrow & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8.75 \\ 5 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \\
A\left(\frac{1}{2};3\right) & B(0.5;-1) & \longrightarrow & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \vec{e_2}
\end{array}$$

b. $M(0.5;-2.5)$

c. $C(5;-4)$

d. $P'(2a - x; 2b - y)$

4.8 $A(4;-6)$ $\quad B(7;-4)$ $\quad C(2;0)$ $\quad D(-5;4)$ $\quad E(0;0)$

4.9 $D(-1.5;9.5)$ $\quad M(-1/4;13/4)$

4.10

A	$(4;9)$	$(0.5;-2)$	$(-12;-3)$	$(2;7)$	$(0.5;19)$	$(-2;-3)$
B	$(-2;5)$	$(5.5;9)$	$(0;7)$	$(0.5;18)$	$(-5.5;17)$	$(4;-7)$
M_{AB}	$(1;7)$	$(3;3.5)$	$(-6;2)$	$(1.25;12.5)$	$(-2.5;18)$	$(1;-5)$
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

4.11 $B(-1;-4)$ $\quad C(1;-2)$ $\quad D(-1;4)$

4.12 $A'(-12;-1)$ $B'(-4;-5)$ $C'(-6;7)$

4.13 $G(-2;4)$ $D(16;-5)$

4.14 $A(-2;5)$ $B(1;1)$ $C(0;7/3)$ $D(1.75;0)$ $E(0.7;1.4)$ $F(-3.5;7)$
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} /\!\!/ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -7/3 \end{pmatrix} /\!\!/ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -5.6 \end{pmatrix}$ donc c'est une droite !

4.15

a. $d_1 : \begin{cases} x = -2 + 10\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$ $-2x + 10y - 34 = 0$

b. $d_2 : \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 1 \end{cases}$ $y = 1$

c. $d_3 : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$ $5x + 2y = 0$

4.16

b. $I(1;2)$

c. $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\parallel \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $d_1 : 2x + y - 4 = 0$ $d_2 : 2x - y = 0$

4.17

a. $(0;-1.5)$ $(3;0)$ $(0;-3)$ $(4;0)$

b. $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $\vec{d_1} \not\parallel \vec{d_2} \Rightarrow$ Sécantes

e. $I(6;1.5)$

f. $d_1 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 3\mu \end{cases}$

4.18 $m_a : \begin{cases} x = -5 + 15\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $x + 15y - 25 = 0$ $D \in m_a$

4.19

Equations paramétriques	Equation cartésienne	Un point	Un vecteur directeur
$\begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$	$3x + 2y - 13 = 0$	$(5;-1)$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x = 10 + 4\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$	$x + 4y - 10 = 0$	$(10;0)$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x = -7 + 6\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$	$5x - 6y + 41 = 0$	$(-7;1)$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 9 + \lambda \end{cases}$	$x + 2y - 18 = 0$	$(0;9)$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.20 a. $I\left(-\frac{52}{23};-\frac{165}{23}\right)$ b. $I\left(\frac{151}{19};-\frac{7}{19}\right)$ c. $I\left(-\frac{19}{13};\frac{21}{26}\right)$

4.21 $B(4;-4)$ $C(2;4)$

4.22 $A(-5;-3)$ $B(0;-1)$ $C(-2;4)$ ou $A(-9;7)$ $B(-4;9)$ $C(-2;4)$

4.23 a. $B(5;7)$ $C(-2;1)$
b. $m_C : x - 2y + 4 = 0$
c. $d_a : \begin{cases} x = 5 + 7\lambda \\ y = 7 + 6\lambda \end{cases}$

4.24 a. $m = -\frac{10}{3}$ b. $m = 0$ c. $m = \frac{4}{3}$ d. $m = 10$

4.25 $A(-7;-4)$ $B(3;2)$ $C(11;-2)$

4.26 a. $\vec{a} \bullet \vec{b} = -11$ $\vec{b} \bullet \vec{c} = 1$ $\vec{b} \bullet \vec{d} = -39$
b. $\|\vec{a}\| = \sqrt{13}$ $\|\vec{b}\| = \sqrt{74}$ $\|\vec{c}\| = 5$ $\|\vec{d}\| = \sqrt{29}$
c. $\vec{e} = \pm\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
d. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$
e. $\vec{a}$ $\vec{d}$
f. $f_1 = -\frac{15}{4}$

4.27 Obtus $p = \sqrt{61} + \sqrt{8} + \sqrt{73} \cong 19.18$

4.28 b. $\|\vec{b'}\| = \frac{13}{5}$
c. $A = 34$
d. $\vec{b'} = \begin{pmatrix} 1.56 \\ -2.08 \end{pmatrix}$

4.29 a. $x = -\frac{12}{7}$
b. $x_1 = 4$ et $x_2 = 3$

4.30 b. $\|\vec{b'}\| = \frac{18}{13}$
c. $A = 46$
d. $\vec{b'} = \begin{pmatrix} 1.278 \\ -0.533 \end{pmatrix}$

4.31 $C_1(-6;13)$ $C_2(12;-11)$

4.32 $\alpha \simeq 88.67°$, $\beta \simeq 81.03°$ et $\gamma \simeq 169.70°$

4.33 $a = \sqrt{41}$, $b = \sqrt{116}$ et $c = \sqrt{117}$
$\alpha \simeq 34.51°$, $\beta \simeq 72.35°$ et $\gamma \simeq 73.14°$
$h_A \simeq 10.31$, $h_B \simeq 6.13$ et $h_C \simeq 6.10$
$Aire = 33$

4.34 $y_1 \simeq 0.76$ $y_2 \simeq -7.72$

4.35 $\alpha \simeq 15.07°$

4.36 a. $2x - 3y - 3 = 0$ b. $-4x - y - 18 = 0$

4.37 a. $a : 5x + 2y + 4 = 0$
b. $b : -4x + 3y + 15 = 0$
c. $c : -2x + 5y - 12 = 0$
d. $d : -4x + 3y + 14 = 0$

4.38

a. $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(4;0)$ $(0;-3)$

b. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(0;-3)$

c. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.39

a. $C_1\left(-\frac{23}{13};\frac{22}{13}\right)$, $C_2\left(\frac{57}{13};\frac{2}{13}\right)$, $C_3\,(-0.75;1.44)$ et $C_4\,(3.69;0.33)$

b. $C_5\left(\frac{17}{13};\frac{12}{13}\right)$

c. $C_6\,(-5;0)$ et $C_7\,(53;-12)$

4.40

a. $b : 4x + 3y - 6 = 0$

b. $I(3;-2)$

c. $C(9;-10)$

4.41

a. $m_{AB} : 3x - 2y - 5 = 0$ $m_{AC} : x = 2$ $m_{BC} : x + 2y - 3 = 0$

b. $M(2;0.5)$

c. $r = \frac{\sqrt{65}}{2}$

4.42

$\mathrm{dist}(d;O) = \frac{24}{5}$ $\mathrm{dist}(d;B) = 10$ $\mathrm{dist}(d;C) = 0$
$e : 4x - 3y - 14 = 0$ $f : 4x - 3y - 34 = 0$

4.43

$P_1(7;3)$ $P_2(5;-11)$

4.44

a. $\mathrm{dist}(a;b) = 3$

b. $c : 8x + 6y - 63 = 0$

c. $d_1 : 4x + 3y - 34 = 0$
$d_2 : 4x + 3y - 54 = 0$

4.45

$c : 21x + 77y - 231 = 0$ $d : 99x - 27y + 81 = 0$

4.46

a. $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b. $P_1(1;0)$ $P_2(9;0)$

4.47

a. Oui $C(7;1)$ $r = \sqrt{176}$

b. Non $r < 0$

c. Non $r = 0$

d. Oui $C\left(-\frac{7}{6};0\right)$ $r = \frac{13}{6}$

4.48

a. $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 169$

b. $a_1 = 5$ $b_2 = -8$

c. $m : 7x + 17y - 19 = 0$

4.49

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$

4.50

a. P_1 extérieur P_2 intérieur P_3 sur le cercle

b. $t_1 : x - 2y + 3 - 7\sqrt{5} = 0$ $t_2 : x - 2y + 3 + 7\sqrt{5} = 0$
$T_1(8.13;-2.26)$ $T_2(1.87;10.26)$

c. Sécants $I_1(0.66;9.49)$ $I_2(-1.74;5.89)$

4.51

a. $x^2 + (y - 15)^2 = 170$

b. $d : 7x - 11y - 5 = 0$

c. $\alpha \simeq 57.53°$

4.52 $t : 2x + 3y = 0$

4.53 $I_1(5; -1)$ $I_2(3; 1)$

4.54 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{16}{5}$

4.55 $d_1 : x - 4y - 5 = 0$ $d_2 : x - 4y - 39 = 0$

4.56 $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 10$

4.57 $C\left(-\frac{13}{15}; \frac{62}{15}\right)$ $r = \frac{17}{15}$

4.58 $P_1(7; 7)$ $P_2(-3; -3)$ Aire$= 50$

4.59 a. $m \in \left]-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right[$ b. $m = \pm\frac{3}{4}$

4.60 $(x + 36)^2 + (y - 21)^2 = 1296$ et $\left(x - \frac{18}{17}\right)^2 + \left(y - \frac{87}{17}\right)^2 = \frac{324}{289}$

4.61 a. $I_1(3; -4)$ $I_2(-4; 3)$ b. $I_1(1; 8)$ $I_2(9; 0)$