LDDR / Maths II

janvier 2019

TE 3 : Trigonométrie

Nom : ....

points	note

Exercice 1. [~10 minutes, 3 pts]

L'angle α vérifie $90° < \alpha < 180°$ et $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$. Sans utiliser les touches trigonométriques de la calculatrice, déterminer les valeurs exactes et simplifiées de $\cos(\alpha)$ et de $\sin(\alpha + 45°)$.

- $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$, $(\cos\alpha)^2 + \frac{144}{169} = \frac{169}{169}$, $(\cos\alpha)^2 = \frac{25}{169}$

  $\cos\alpha = \pm\frac{5}{13}$ Comme $\cos\alpha < 0$, on a $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

- $\sin(\alpha + 45°) = \sin\alpha \cdot \cos(45°) + \cos\alpha \cdot \sin(45°) = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $= \frac{12\sqrt{2}}{26} - \frac{5\sqrt{2}}{26} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$

Exercice 2. [~15 minutes, 8 pts]

Résoudre les équations suivantes (solutions générales en degrés avec deux décimales)

a) $7\cos(\alpha) - 5\sin(\alpha) = 0$

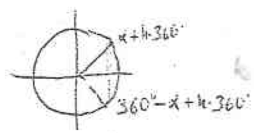
$7\cos\alpha = 5\sin\alpha$, $7 = 5\tan\alpha$, $\tan\alpha = \frac{7}{5}$, $\alpha \cong 54.46° + k \cdot 180°$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos(2\alpha + 50°) = -0.25$

$\begin{cases} 2\alpha + 50° \cong 104.48° + k \cdot 360° \\ 2\alpha + 50° \cong 255.52° + k \cdot 360° \end{cases}$ $\begin{cases} 2\alpha \cong 54.48° + k \cdot 360° \\ 2\alpha \cong 205.52° + k \cdot 360° \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha \cong 27.24° + k \cdot 180° \\ \alpha \cong 102.76° + k \cdot 180° \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)$



$3\alpha = \alpha + k \cdot 360°$ ou $3\alpha = 360° - \alpha + k \cdot 360°$

$2\alpha = k \cdot 360°$ ou $4\alpha = 360° + k \cdot 360°$

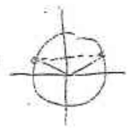
$\alpha = k \cdot 180°$ ou $\alpha = 90° + k \cdot 90°$ $(k \in \mathbb{Z})$

d) $2(\cos\alpha)^2 + 1 = 5\sin(\alpha)$

$2(1 - (\sin\alpha)^2) + 1 = 5\sin\alpha$, $2 - 2(\sin\alpha)^2 + 1 = 5\sin\alpha$

$0 = 2(\sin\alpha)^2 + 5\sin\alpha - 3$ $\Delta(2;5;-3) = 25 - (-24) = 49$

$\sin\alpha = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ -\frac{12}{4} = -3 < -1 \end{cases}$ ↯ donc $\begin{cases} \alpha = 30° + k \cdot 360° \\ \alpha = 150° + k \cdot 360° \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$



Exercice 3. [~10 minutes, 2 pts]

Développer $4\cos(\alpha - 30°) + 2\sin(\alpha + 30°)$ sous la forme $A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha)$.

$$4\left(\cos\alpha \cdot \cos(30°) + \sin\alpha \cdot \sin(30°)\right) + 2\left(\sin\alpha \cdot \cos(30°) + \cos\alpha \cdot \sin(30°)\right)$$

$$= 4\left(\cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}\right) + 2\left(\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\cos\alpha + 2\sin\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$$

$$= \underbrace{(2\sqrt{3}+1)}_{A}\cos\alpha + \underbrace{(2+\sqrt{3})}_{B}\sin\alpha$$

Exercice 4. [~10 minutes, 2 pts]

Déterminer les trois angles du triangle de côtés $a = b = 2$ et $c = 1$.

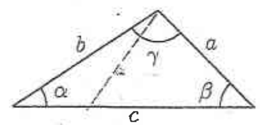
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad \beta \cong 75.52°$$

$a = b$ (triangle isocèle) donc $\alpha = \beta \cong 75.52°$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 2\alpha \cong 28.96°$$

Exercice 5. [~15 minutes, 5 pts]

On connaît $\alpha = 30°$, $a = 2$ et $b = 3$.
Pour chaque triangle possible, càlculer avec deux décimales les angles β et γ, le côté c et l'aire $\mathcal{A}$.



$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \text{donc} \quad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\beta_1 \cong 48.59° \quad , \quad \beta_2 = 180° - \beta_1 \cong 131.41°$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 150° - \beta$$

$$\gamma_1 \cong 101.41° \quad ; \quad \gamma_2 \cong 18.59°$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3\cos\gamma = 13 - 12\cos\gamma$$

$$c = \sqrt{13 - 12\cos\gamma} \qquad c_1 \cong 3.92 \quad , \quad c_2 \cong 1.28$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\sin\gamma = 3\sin\gamma$$

$$\mathcal{A}_1 \cong 2.94 \quad , \quad \mathcal{A}_2 \cong 0.96$$