1 Niv.2 Géométrie métrique dans le plan

Exercice 1

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{a} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\quad \vec{b} = 3\vec{u}_1$, $\quad \vec{c} = -\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$, $\quad \vec{d} = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

$\vec{e} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $\quad \vec{f} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$, $\quad \vec{g} = -3\vec{u}_2$, $\quad \vec{h} = -4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$.

Calculer :

$\vec{a} \bullet \vec{c}$, $\quad \vec{a} \bullet \vec{e}$, $\quad \vec{c} \bullet \vec{g}$, $\quad (\vec{a} + \vec{f}) \bullet (\vec{g} - \vec{f})$, $\quad (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \bullet (\vec{d} - 2\vec{h} + \vec{f})$

$(\vec{u}_1 , \vec{u}_2)$ désigne une base orthonormée

Exercice 2

Calculer la norme (longueur) de chacun des vecteurs suivants :

$\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\quad \vec{b} = 12\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$, $\quad \vec{c} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\quad \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_2$,

$\vec{e} = -\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{3}{4}\vec{u}_2$, $\quad \vec{f} = -\frac{8}{17}\vec{u}_1 + \frac{15}{17}\vec{u}_2$, $\quad \vec{g} = 3k\vec{u}_1 + 4k\vec{u}_2$.

Exercice 3

On dit qu'un *vecteur de norme 1 est un* ***vecteur-unité***.

Trouver les composantes des vecteurs-unités qui sont parallèles à :

a) $\vec{a} = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$

b) $\vec{b} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

Exercice 4

On donne deux vecteurs : $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\quad \vec{b} = 12\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$.

a) Calculer la longueur de $\vec{a}\,'$, la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

b) Trouver le vecteur-unité $\vec{u}$ de même direction et de même sens que $\vec{b}$.

c) Calculer les composantes de $\vec{a}\,'$.

Exercice 5

Trouver deux vecteurs orthogonaux à $\vec{a}$: le premier ayant une norme égale à celle de $\vec{a}$ et le second étant un vecteur-unité.

a) $\vec{a} = 8\vec{u}_1 - 15\vec{u}_2$

b) $\vec{a} = -\vec{u}_1 - \sqrt{3}\vec{u}_2$

c) $\vec{a} = -3\vec{u}_1$

d) $\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

Géométrie métrique dans le plan

Exercice 6

Déterminer le nombre réel λ pour que le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Prouver que : $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$.

Exercice 8

Soit les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$. Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{v}$, tels qu'on a :

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \perp \vec{a}.$$

Exercice 9

On donne les vecteurs : $\vec{e}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{e}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{a} = 4\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, et $\vec{b} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$.

a) Calculer les produits scalaires: $\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2$ et $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

b) Expliquer, pourquoi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base non orthonormée.

c) Calculer les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Exercice 10

Relativement à un repère métrique, un carré *ABCD* est donné par le sommet *A*(6 ; 1) et par son centre *M*(3 ; -1).
Calculer les coordonnées des sommets *B*, *C* et *D*, puis aire de ce carré.

Exercice 11

Soit *A*(0 ; 2) et *B*(4 ; -1).

a) Exprimer la hauteur h d'un triangle équilatéral en fonction de a.

b) Déterminer le milieu M du segment AB.

c) Trouver le vecteur unité $\vec{u}$ perpendiculaire à AB.

d) Calculer C, tel que le triangle ABC soit équilatéral.

Géométrie métrique dans le plan

Exercice 12

Déterminer l'équation cartésienne de la droite d donnée par :

a) le point $A(4 ; 1)$ et le vecteur perpendiculaire à d, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) le point $B(-2 ; 5)$ et le vecteur perpendiculaire à d, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

On donne un triangle ABC par les coordonnées de ses sommets :

$A(-1 ; 4)$, $B(3 ; -1)$ et $C(6 ; 1)$.

a) L'angle en A est-il aigu, droit ou obtus ?
b) Calculer la longueur du segment BC.
c) Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur issue de A.
d) Soit H le point d'intersection du côté BC et de la hauteur issue de A. Trouver le point H.
e) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 14

Un trapèze rectangle $ABCD$ est donné par $A(-3; 0)$, $B(1 ; 2)$ et $C(4 ; 1)$.

a) Déterminer le sommet D, sachant que les côtés AB et CD sont parallèles et que l'angle en A est droit.
b) Calculer le périmètre et l'aire de ce trapèze.

Exercice 15

On considère les points : $A(-2 ; 1)$, $B(1; \frac{5}{2})$ et $C(1 ; -1)$.

Déterminer le point M de la droite d_{OC} dont la projection orthogonale sur la droite d_{AB} est le point $M'(0 ; 2)$.

Exercice 16

Un triangle ABC est donné par ses sommets $A(-2 ; -3)$, $B(10 ; 0)$ et $C(0 ; 2)$.

a) Vérifier, par calcul et par dessin, que les trois <u>médiatrices</u> du triangle se coupent en un point unique M (<u>centre du cercle circonscrit</u>).
b) Vérifier, par calcul et par dessin, que les trois <u>hauteurs</u> du triangle se coupent en un point unique H (<u>orthocentre du triangle</u>).
c) Soit G le centre de gravité du triangle. Vérifier que les points H, M et G sont alignés.

<u>*La droite passant par les points M, G et H est la droite d'Euler du triangle.*</u>

Exercice 17

Calculer la distance du point R à la droite d dans le cas suivants :

a) $R(0\ ;\ 0)$, d passe par le point $A(3\ ;\ 5)$ perpendiculairement à $\vec{n} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

b) $R(3\ ;\ 0)$, d passe par les points $A(1\ ;\ 1)$ et $B(-5\ ;\ 3)$.

c) $R(-2\ ;\ 3)$, d passe par $A(-2\ ;\ 1)$ parallèlement à $\vec{d} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$.

d) $R(6\ ;\ -1)$, d est la droite d'équation $5x + 7y - 3 = 0$.

Exercice 18

On donne deux droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 1 + 12k \end{cases} \qquad\qquad d_2 : 12x - 5y + 10 = 0$$

Vérifier que ces deux droites sont parallèles et calculer la plus courte distance les séparant.

Exercice 19

Soit d la droite d'équation : $24x - 7y - 56 = 0$.

a) Trouver les équations des droites d_1 et d_2 qui sont à distance 3 de d.

b) Trouver les droites d_3 et d_4 parallèles à d' qui passe par l'origine et est parallèle à d, et qui sont à distance 1 de d'.

Exercice 20

a) Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations :

$d_1 : x - 3y + 8 = 0$ $\qquad$ $d_2 : 3x - y - 1 = 0$.

b) Vérifier que les bissectrices trouvées passent par l'intersection de d_1 et d_2 et qu'elles sont perpendiculaires entre elles.

Exercice 21

Déterminer l'ensemble des points du plan qui sont équidistants des droites d_1 et d_2 dans les cas suivants :

a) $d_1 : 20x + 21y - 19 = 0$ $\qquad$ et $\qquad$ $d_2 : 7x - 24y - 38 = 0$

b) $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ $\qquad$ et $\qquad$ $d_2 : 4x - 6y - 5 = 0$

Géométrie métrique dans le plan

Exercice 22(facultatif)

Un triangle ABC est donné par ses côtés :

$a : x + 18y - 17 = 0$ $\quad$ $b : 3x + 2y + 12 = 0.$ $\quad$ $c : 6x - 17y - 102 = 0$

a) Dessiner le triangle en utilisant 1 carreau comme unité.
b) Calculer les coordonnées des sommets A et C.
c) Déterminer les équations des bissectrices en A et C.
d) Trouver le centre et le rayon d'un cercle inscrit du triangle.

Exercice 23

Déterminer l'équation du cercle :

a) centré à l'origine et de rayon 4.
b) de centre $\Omega(4 ; -2)$ et de rayon 3.
c) de centre $\Omega(5 ; -6)$ et passant par l'origine.
d) de centre en $\Omega(0 ; 5)$ et tangent à la droite $d : x + 2y = 0$.

Exercice 24

On donne un cercle par son centre $\Omega(1 ; 2)$ et son rayon $\rho = 5$, et une droite d par son équation : $d : -3x + 4y + 24 = 0$

a) Donner l'équation du cercle.
b) Calculer les points d'intersection du cercle et de l'axe des x.
c) Vérifier, par calcul, que le point $A(5 ; 5)$ est sur le cercle.
d) Trouver l'équation de la tangente au cercle en $A(5 ; 5)$.
e) Calculer la plus courte distance de la droite d au centre Ω, puis celle de d au cercle.
f) Quelle valeur peut-on attribuer au nombre c pour que la droite d'équation : $d' : -3x + 4y + c = 0$ soit tangente au cercle.

Exercice 25

a) Determiner le centre et le rayon d'un cercle donné par l'équation suivante :

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

b) Parmi les points $R(6 ; 2)$, $S(1 ; -1)$ et $T(7 ; 1)$, lesquels sont à l'intérieur du cercle (par calcul) ?
c) On appelle A et B les points communs au cercle et à la droite $d : x - 2y + 3 = 0$. Calculer leurs coordonnées.
d) Déterminer les tangents au cercle en A et B.

Géométrie métrique dans le plan

Exercice 26

On donne un cercle Γ et une droite d :

$\Gamma : x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$, $d : -2x + 3y + 3 = 0$

a) Trouver le centre Ω et le rayon ρ du cercle.

[$\Omega(-1 ; 0)$ $\rho \cong 3,6$]

b) Vérifier, par calcul, que la droite d est une sécante du cercle Γ et calculer les points d'intersection.

ü $I_1(-3 ; -3)$ et $I_2(33/13 ; 9/13)$]

Exercice 27

a) Trouver les coordonnées des points d'intersection de la droite $d : 7x - y + 12 = 0$ et du cercle $\Gamma : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) Trouver les parallèles à d qui sont tangentes à Γ.

Exercice 28

Déterminer l'équation du cercle :

a) passant par les points $A(-1 ; 5)$, $B(6 ; -2)$ et $C(8 ; 2)$.

b) passant par le point $A(-2 ; 1)$ et tangent à la droite $d : 3x - 2y - 6 = 0$ au point $B(4 ; 3)$.

Exercice 29

Déterminer les équations des cercles de rayon 5, dont les centres sont sur la droite d'équation $d : 2x + y - 1 = 0$ et qui sont tangents à la droite d'équation $d' : 3x + 4y - 34 = 0$.

Exercice 30

Déterminer les équations des cercles centrés sur la droite $d : 4x - 5y - 3 = 0$ et tangents aux droites :

$a : 2x - 3y - 10 = 0$

$b : 3x - 2y + 5 = 0$