1 Niv.2

Géométrie plane

Exercice 1

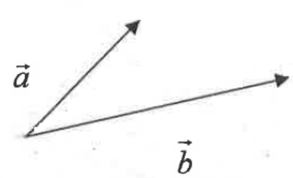
On donne un vecteur non nul $\vec{a}$. Construire des flèches représentant :

$$\vec{a}, \quad \vec{b} = 4\vec{a}, \quad \vec{c} = -3\vec{a}, \quad \vec{d} = -\frac{3}{4}\vec{a}, \quad \vec{e} = \frac{4}{3}\vec{a}, \quad \vec{t} = \sqrt{3}\vec{a}.$$

Exercice 2

On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de directions différentes.
Construire des flèches, **de même origine**, qui représentent les vecteurs suivants :

$$\vec{c} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{d} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}), \quad \vec{e} = \frac{1}{3}(-\vec{a} + 4\vec{b}), \quad \vec{f} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b})$$

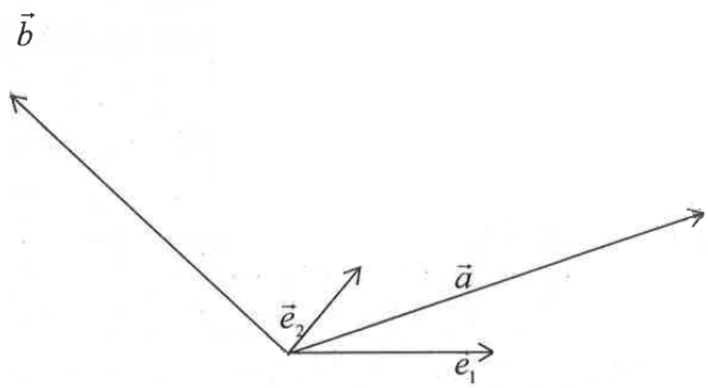


Exercice 3

Décomposer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ainsi :

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \vec{b} = r\vec{e}_1 + s\vec{e}_2$$

Evaluer ensuite les nombres **:** *x, y, r* et *s*.



Exercice 4

Relativement à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne trois vecteurs :

$$\vec{a} = -2\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{6}\vec{e}_2$$

Vérifier graphiquement, puis par calcul si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants, si $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont dépendants.

Exercice 5

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = 4\vec{e}_1 + k\vec{e}_2.$$

Déterminer le nombre k tel que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient linéairement dépendants ($\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Exercice 7

Tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 peut être exprimé par une combinaison linéaire de deux vecteurs de base :

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) - \text{base}$$

Soit $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = -4\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2$ et $\vec{c} = 7\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2$

a) Calculer les composantes des vecteurs :

$$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c}$$

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment-ils une base de V_2 ?

c) Déterminer les nombres α et β tels que : $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Exercice 8

Soit le segment $\overline{AB}$ et M son milieu. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 9

Soit O, A et B trois points quelconques.

Le point C est symétrique de A par rapport à B, le point D est situé au $\frac{3}{4}$ de $\overrightarrow{AB}$, à partir de A.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 10

Compléter le tableau

Point A	Point B	Milieu du segment $\overline{AB}$	Vecteur $\overrightarrow{AB}$
(3 ; -5)	B(1 ; 4)		
(5 ; -6)		(2 ; 3)	
	(-7 ; 2)		$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
		(1 ; -5)	$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Déterminer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :

$\vec{a} \parallel \vec{e}_1$, $\vec{b} \parallel (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ et $3\vec{a} + \vec{b} = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est une base

Exercice 12

Relativement à un repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne $A(4 ; -6)$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 + \vec{2}e_2$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.

Construire et calculer les coordonnées des points A, B, C, D et E.

Exercice 13

Dans un repère $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on donne les points $A(-2\ ;\ -1)$ et $B(4\ ;\ 2)$.

a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer les coordonnées du milieu M du segment AB.

c) Déterminer le point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$.

Exercice 14

Soit A, B et C trois points quelconques. Soit M, le milieu de $\overline{BC}$, le point G est situé au $\frac{2}{3}$ de $\overline{AM}$ à partir de A et le point N milieu de $\overline{AB}$.

Exprimer les vecteurs suivants à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{CN}$.

Exercice 15

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. Soit O un point quelconque.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ par une combinaison de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 16

1. Déterminer le centre de gravité du triangle donné par ses sommets :
   $A(-3\ ;\ 7)$, $B(2\ ;\ 4)$ et $C(-5\ ;\ 1)$.
2. Soit $G(5\ ;\ 2)$ le centre de gravité du triangle ABD. Déterminer les coordonnées de D.

Exercice 17 (parallélogramme)

Soit quatre points A , B, C et D, tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Prouver que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Indication : présenter le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.

Exercice 18

Un parallélogramme $ABCD$ est donné par $A(1\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;\ 4)$. Calculer les coordonnées du sommet D et du centre M (M est le point d'intersection des diagonales).

Exercice 19

On donne quatre points : $A(-5\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 1)$, $C(8\ ;\ -1)$ et $D(7\ ;\ -1)$.

a) A,B et C sont-ils alignés ?

b) A,B et D sont-ils alignés ?

Exercice 20

On donne trois points $A(-3\ ;\ -2)$, $B(7\ ;\ 1)$ et $C(4\ ;\ y)$.
Calculer y de façon que les points A , B et C soit alignés.

Exercice 21

On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre k, pour qu'ils soient alignés:

a) $A(1\ ;\ 2)$, $B(-3\ ;\ 3)$, $C(k\ ;\ 1)$
b) $A(2\ ;\ k)$, $B(7k - 29\ ;\ 5)$, $C(-4\ ;\ 2)$

Exercice 22

Etablir une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de la droite d déterminée par les points A et B dans chacun des cas suivants :

a) $A(1\ ;\ 3)$, $B(6\ ;\ 1)$
b) $A(3\ ;\ -10)$, $B(3\ ;\ 7)$
c) $A(-2\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 4)$
d) $A(-4\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ -2)$
e) $A(0\ ;\ -2)$, $B(0\ ;\ -3)$

Exercice 23

Etablir une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de la droite d déterminée par :

a) le point $A(3\ ;\ 2)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) le point $A(-5\ ;\ 3)$ et le vecteur directeur $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 (facultatif)

Soit la droite $d : 3x - 4y - 12 = 0$.
Etablir une représentation paramétrique de la droite d .

[$d : \begin{cases} x = 4m \\ y = -3 - 3m \end{cases}$]

Exercice 25
Soit deux droites a et b données par :

$$a : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b : B(0\,;-1),\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Trouver un point A et un vecteur directeur $\vec{a}$ de la droite a.
b) Déterminer , en plus, les coordonnées de 6 points de la droite a.
c) Trouver la représentation paramétrique de la droite b.
d) Déterminer l'équation cartésienne de la droite a et de la droite b.
e) Déterminer le point d'intersection I de a et b.

Exercice 26
Dessiner les quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4 données par :

$$d_1 : 5x + 3y - 15 = 0 \qquad d_2 : \begin{cases} x = 2 + m \\ y = m \end{cases}$$

$$d_3 : x - 4 = 0 \qquad d_4 : \begin{cases} x = k \\ y = 2 + k \end{cases}$$

a) Calculer les coordonnées des différents points d'intersection.
b) Trouver une représentation paramétrique de la droite d_1 .

Exercice 27 (facultatif)
On donne deux points $A(8\,;0)$ et $B(6\,;8)$. Etablir une équation cartésienne de chacune des médianes m_O, m_A et m_B du triangle OAB .
Vérifier que ces trois médianes sont concourantes.
[$m_A : 4x + 5y - 32 = 0$, $m_B : 4x - y - 16 = 0$, $m_O : -4x + 7y = 0$, $G(\frac{14}{3}\,;\frac{8}{3})$]

Exercice 28 (facultatif)
On donne trois points $A(3\,;-1)$, $B(1\,;3)$ et $C(5\,;2)$. Etablir une équation cartésienne de la droite d_{AB}, puis de la droite d' telle que $d' \parallel d_{AB}$ et passant par le point C .
[$d' : 2x + y - 12 = 0$]

Exercice 29

Soit $A(3\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$.

a) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.

b) Prouver que $OABC$ est un trapèze.

c) Déterminer le point d'intersection I de ses diagonales.

Exercice 30

Un triangle ABC est donné par ses côtés :

$$a : x + 3y + 2 = 0, \qquad b : 3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad c : \begin{cases} x = -3 + k \\ y = -2 + 2k \end{cases}.$$

a) Calculer les coordonnées des sommets A, B et C.

b) Trouver les équations cartésiennes des parallèles aux côtés du triangle, passant par chaque sommet.

c) Vérifier que la droite $m : 4x + 5y + 1 = 0$ est une médiane du triangle ABC.

Exercice 31 (facultatif)

On donne quatre droites par leurs équations cartésiennes :

$a :\ 3x - 4y + 8 = 0$ $\qquad$ $b :\ x + 3y - 4 = 0$

$c :\ -6x + 8y + 5 = 0$ $\qquad$ $d :\ 2{,}1x - 2{,}8y + 5{,}6 = 0$

Etudier les positions relatives de ces droites et calculer les éventuels points d'intersection.

Exercice 32

1. Pour chacune des valeurs de s de l'ensemble $E = \{ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2 \}$, représenter la droite d_s d'équation :

$$d_s : (2 + 3s)x + (3 - 2s)y = 16 + 11s$$

2. Que doit valoir s pour que la droite d_s soit parallèle à l'axe des x ?