LDDR – Niveau II : Fonctions

Niv.2

Applications

Exercice 1

Les données suivantes définissent-elles des fonctions ?
Justifier précisément chaque réponse !

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 3x - 5$

c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$, $x \mapsto (x+1)^2$

d) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \dfrac{x}{3x-4}$

e) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dfrac{x(x+1)}{2}$

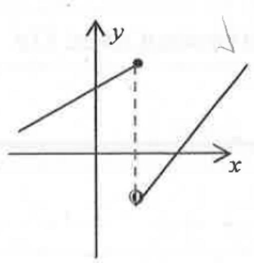
f) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{3x-2}$

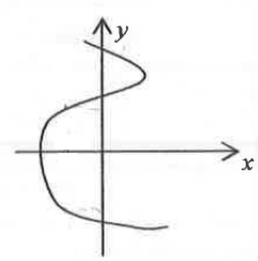
g) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \sqrt{3x-2}$

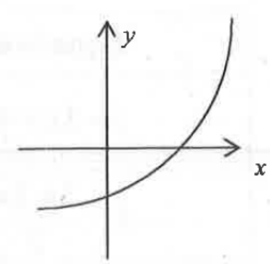
h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$

Exercice 2

Parmi les courbes esquissées ci-dessous, déterminer celles qui représentent le graphe d'une fonction.







Exercice 3

Soit la ~~fonction~~ correspondance $f: x \mapsto \dfrac{4-x}{x^2-2}$

a) f est-elle une fonction de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}$?

b) f est-elle une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

c) Calculer l'image de : 3, -5, $-\dfrac{4}{7}$.

d) Trouver les nombres dont l'image est 0.

Exercice 4

Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$

a) Choisir l'ensemble de départ D le plus grand possible.

b) Calculer $f(1)$ et $f(4)$.

c) Calculer x tel que $f(x) = \frac{3}{5}$

d) Quel est l'ensemble des images $f(D)$.

Exercice 5

Soit les fonctions suivantes :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x + 2 \qquad g(x) = 3x - 1 \qquad h(x) = -x + 3$$

a) Trouver le zéro de f, g et h.

b) Donner la pente du graphe de f, g et h.

c) Représenter graphiquement f, g et h.

Exercice 6

Compléter le tableau :

Equation	Pente	Intersection avec Oy
$y = 3x + 4$		
$y = \frac{3+5x}{2}$		
$y = -3$		
$3x + 7y - 6 = 0$		
$9x = 7y$		
	$\frac{2}{7}$	1
	3	-5

Applications

Exercice 7

Trouver la fonction f (affine, linéaire) dont le graphe passe par :

a) les points $O(0 ; 0)$ et $P(2 ; 6)$.

b) les points $A(-1 ; -4)$ et $B(7 ; -8)$.

c) le point $C(2 ; 2)$ et dont la pente de la droite vaut $\frac{1}{5}$.

Exercice 8

1. Dessiner le graphe (droite) de la fonction f qui passe par les points $A(4 ; 1)$ et $B(8 ; 2)$, puis calculer sa pente a_1.

2. Dessiner le graphe (droite) de la fonction g qui passe par les points A et $C(3 ; 5)$, puis calculer sa pente a_2.

3. Calculer le produit $a_1 \cdot a_2$.

Conclusions :

Exercice 9

Soit la fonction $f : x \mapsto -2x + 1$ et le point $A(2 ; 1)$.

a) Déterminer une fonction affine h dont le graphe passe par le point A et est parallèle à celui de f.

b) Déterminer une fonction affine g dont le graphe est de pente $\frac{1}{2}$ et

rencontre celui de f

au point $(1 ; f(1))$.

Exercice 10 (facultatif)

Trouver la fonction affine f telle que :

$f(4) = 4$ et $f(-6) = -1$

Exercice 11 (facultatif)

Un parallélogramme $ABCD$ est donné par les équations de deux côtés et d'une diagonale :

$d_{AB} : x - 2y - 4 = 0$ $\qquad$ $d_{BC} : x + 5y + 24 = 0$ $\qquad$ $d_{AC} : 2x + 3y + 13 = 0$

Trouver l'équation de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

Exercice 12

Montrer que l'équation : $6x + 4y - 12 = 0$ est une équation d'une droite. Donner la pente de cette droite. Calculer le zéro de la fonction correspondante f, puis donner son graphe.

Exercice 13

1) Résoudre algébriquement et géométriquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x = 6 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

2) Remplir le tableau suivant :

Caractéristiques d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Graphiques	Nombre de solutions	Classification

Exercice 14

Dessiner les graphes des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto |x| - 2$ **c)** $x \mapsto |x| + 1$

b) $x \mapsto |x - 2|$ **d)** $x \mapsto |x + 1|$

Exercice 15

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ **b)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\,\mathrm{sgn}(x)$ **c)** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - [x]$

Applications

Exercice 16

a) Représenter graphiquement les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}(x+2) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto |x-2|$$

b) Déterminer graphiquement les ensembles :

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) = g(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \leq g(x)\}$

c) Déterminer A et B algébriquement.

Exercice 17

Ecrire f sans utiliser la valeur absolue, puis dessiner le graphe de f :

a) $f(x) = 2|x| + 3$
b) $f(x) = |2x - 3|$
c) $f(x) = |-x + 1|$

Exercice 18

Résoudre les équations suivantes :

a) $|x - 2| = 3$
b) $|2x - 9| = |12 + 5x|$
c) $x^2 - |3x| = 0$
d) $-11 + 2|2x - 3| = -6$

Exercice 19

Dessiner le graphe des fonctions suivantes (dans un même système d'axe) en précisant son axe de symétrie ses zéros et son sommet :

a) $f_1 : x \mapsto x^2$, puis $f_2 : x \mapsto (x-3)^2$ et $f_3 : x \mapsto (x-3)^2 + 2$
b) $f_1 : x \mapsto -x^2$, puis $f_2 : x \mapsto -(x+2)^2$ et $f_3 : x \mapsto -(x+2)^2 - 3$

Exercice 20

Trouver les zéros des fonctions suivantes (sans formules), puis les sommets des paraboles correspondantes.
Dessiner les graphes.

b) $f_1 : x \mapsto -x^2 + 9$
c) $f_2 : x \mapsto x^2 - 3x$
d) $f_3 : x \mapsto (x-2)^2 + 1$
e) $f_4 : x \mapsto x^2 - 4$
e) $f_5 : x \mapsto -3x^2 + 2x$
f) $f_6 : x \mapsto (x-1)^2 + 4$
g) $f_7 : x \mapsto (x+2)^2 - 2$

Applications

Exercice 21

Trouver le sommet des paraboles suivantes en mettant leur équation sous la forme

$$y = a(x - \mathrm{m})^2 + k$$

a) $y = 4x^2 + 8x - 1$
b) $y = -3x^2 - 2x - 7$
c) $y = -x^2 + x + 10$
d) $y = ax^2 + bx + c$

Exercice 22

Effectuer, puis réduire :

a) $(x-2)(x+5) =$
b) $(x-5)(x-4) =$
c) $(x+6)(x+2) =$

Exercice 23

Factoriser (sans formules) :

a) $x^2 + 3x + 2 =$
b) $x^2 - 2x - 3 =$
c) $b^2 + b - 20 =$
d) $t^2 - 5t + 6 =$
e) $z^2 + 15z + 56 =$

Exercice 24

Résoudre les équations suivantes **(sans formules !)** :

a) $-x^2 - x = 0$

b) $-u^2 + 3 = 0$

c) $-x^2 - 3 = 0$

d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

e) $3x^2 + 2x = 0$

f) $x^2 - 3x = 0$

g) $(x - 2)^2 + 1 = 0$

h) $x^2 - 4 = 0$

i) $x^2 - 6x + 9 = 0$

j) $98x - 50x^3 = 0$

k) $x^3 - 13x^2 - 14x = 0$

l) $16x^2 - 144 = 0$

m) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

n) $(x + 2)^2 - 9 = 0$

o) $4x^2 + 12x + 9 = 16$

p) $ax^2 + bx + c = 0$

Applications

Exercice 25 (facultatif)

Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

b) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

c) $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

d) $(3x - 2)^2 = 8(x - 1)^2$

e) $-2x^2 + 2x - 41 = 0$

f) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$

g) $x^2 + 3x + 4 = 0$

h) $2x^2 + \frac{9}{16} = x$ i)

i) $(2x - 5)^2 = -8$

j) $11x^2 + 2(19x - 12) = 0$

Exercice 26

Résoudre. Etudier les nombre des solutions par rapport à Δ.

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice 27

Dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

b) $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = -3x^2 + x + 1$

1. Calculer les solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

2. Représenter f et g dans un même repère en précisant les éléments suivants : zéros, sommet, axe de symétrie, l'intersection avec l'axe des.

3. A l'aide du graphique, déterminer les ensembles suivantes :

$A = \{ x \mid f(x) > 0 \}$, $B = \{ x \mid g(x) \leq 0 \}$

$C = \{ x \mid f(x) \geq g(x) \}$ $D = \{ x \mid f(x) < g(x) \}$

Exercice 28

Deux fonctions du 2^e degré sont données chacune par des points de leur graphe

- Le graphe de la fonction f passe par $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 5)$ et $C(3 ; 14)$
- Le graphe de la fonction g passe par $D(1 ; -1)$, $B(2 ; 5)$ et $E(-2 ; -7)$

a) Déterminer les expressions fonctionnelles $f(x)$ et $g(x)$.

b) Dans un même repère, tracer les graphes de f et g.

c) Calculer les points d'intersection des deux graphes.

d) En observant le dessin dire pour quels x on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.

Applications

Exercice 29

Pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ 2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

a) Trouver les éléments suivants : zéros, l'intersection avec l'axe des y, axe de symétrie et sommet.

b) Déterminer les points dont l'ordonné (y) vaut 3.

c) Calculer l'image par f de $x = 2$.

d) Représenter graphiquement la fonction f.

e) Représenter graphiquement la fonction $g(x) = |f(x)|$.

Exercice 30

Soit $f(x) = 2x^2 - nx + 3n$

Que doit valoir n pour que l'axe de symétrie de la parabole soit la droite $x = 1$?

Exercice 31

Quelle valeur faut-il attribuer au nombre d pour que l'équation donnée n'ait qu'une solution ? Quelle est alors cette solution ?

a) $3x^2 - 5x + d = 0$ **b)** $x^2 + dx + 2 = 0$ **c)** $3x^2 + dx + d = 0$

d) $x^2 + 2x + d = 3$ **e)** $2x^2 + x + 2 = dx$ **f)** $\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 = dx$

Exercice 32

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4 > 0$ **d)** $2x^2 - 4x - 6 > 0$

b) $9 - x^2 \geq 0$ **e)** $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

c) $x^2 + x - 1 \leq 0$ **f)** $2x^2 - 8x + 8 < 0$

Exercice 33

Dessiner les graphes de :

a) $f(x) = \text{sgn}(3x - 2)$ **c)** $f(x) = \text{sgn}(x^2 + 3x - 4)$.

b) $f(x) = \text{sgn}(x^2)$

Exercice 34

1. Pour quelles valeurs de c l'équation $x^2 + 2x + c = 0$, n'a-t-elle aucune solution ?

2. Pour quelles valeurs de b l'équation $x^2 + bx + 1 = 0$ a-t-elle deux solutions distinctes ? Indiquer ces solutions.

3. L'équation $x^2 - 2x + c = 0$ a deux solutions confondues. Que vaut c ?

4. Comment faut-il choisir la valeur du paramètre m pour que l'équation $4mx^2 + 4x + m = 0$ ait deux solutions distinctes ?

Applications

Exercice 35

Soit x_1 et x_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 \cdot x_2$.

Exercice 36

Prouver que, si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice 37

Ecrire une équation du 2ème degré dont les solutions sont :

a) 8 et -9

b) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$

Exercice 38

Ecrire les fonctions suivantes sous forme d'un produit de 2 fonctions affines :

a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x - 2$

d) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

e) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

f) $f(x) = x^2 + x + 6$

g) $f(x) = 2x^2 - 5x$

h) $f(x) = x^2 - 4$

i) $f(x) = 2x^2 + 7$

j) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Exercice 39

On considère l'équation : $-kx^2 + 2(k-1)x - k - 3 = 0$, où $k \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelle valeur de k l'équation correspondante a-t-elle deux solutions distinctes?

b) Trouver k pour que $x_1 + x_2 = 4$; calculer x_1 et x_2.

Exercice 40

Simplifier, si possible, les fractions suivantes :

a) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 7x + 3} =$

b) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} =$

c) $\dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + 2x - 3} =$

Niv.2

Applications

Exercice 41

Résoudre les équations suivantes, en prenant garde au dénominateur :

a) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x^2}{x^2+x}$

b) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)$

c) $\dfrac{x^2-10}{x^2-7x+12}=\dfrac{3}{x-3}$

d) $\dfrac{6}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}=1-\dfrac{2}{1-x}$

e) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{25}{12}$

f) $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

g) $\dfrac{x-2}{3(x-1)}+\dfrac{x-1}{4(x-2)}=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

h) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x-4}{2x}=\dfrac{4}{2x^2-2x}$

Exercice 42

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2+3a^2=7ax$

b) $x^2+6px+8p^2=0$

c) $b^2x^2-2ba^2x+a^4=0$

d) $c^4x^2-d^2=0$

e) $2x^2-6bx+5cx-15bc=0$

Exercice 43

1. Dessiner le graphe de $f(x)=2x^2-8$.
2. Dessiner le graphe de $g(x)=-x^2+3x$.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g.
4. Trouver : $A=\{x \mid g(x)<f(x)\}$.

Exercice 44

1. Dessiner le graphe de $f(x)=2(x-3)^2+1$.
2. Dessiner le graphe de $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1$.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g.
4. Trouver : $A=\{x \mid f(x)\leq g(x)\}$.

Exercice 45

Une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par trois points

$A(0 ; 2)$, $B(2 ; -2)$ et $C(3 ; 2{,}5)$.

a) Déterminer la valeur des coefficients a, b et c, puis tracer la parabole.

b) Par dessin et par calcul, déterminer les ponts communs à la parabole et au graphe de la fonction affine $x \mapsto x - 4$.

c) Quelle valeur faut-il donner au nombre m pour que la droite d'équation $y = mx + 2$ ne rencontre la parabole qu'une seule fois.

d) Dessiner cette droite.

Exercice 46

Soit la parabole $y = x^2 - x - 2$.

1. Pour quelle valeur(s) de m la droite $y = x + m$ est-elle

a) tangente à p ?

b) possède deux points d'intersection avec la parabole p ?

c) ne possède pas de points d'intersection avec la parabole p ?

2. Pour quelle valeur(s) de a la droite $y = ax - 6$ est-elle

a) tangente à p ?

b) possède deux points d'intersection avec la parabole p ?

c) ne possède pas de points d'intersection avec la parabole p ?

Exercice 47

Soit la parabole $p : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2}$ et la droite $d : y = -\frac{1}{2}x + h$.

Pour quelle(s) valeur(s) de h la droite d est-elle tangente à p ?

Exercice 48

Trouver k pour que la parabole $y = (x + k)^2$ soit tangente à la droite $y = 2x - 7$.

Exercice 49

On considère les paraboles $y = x^2 - 6x + 5$ et $y = -x^2 + 10x - 19$.

Trouver leurs points d'intersection A et B, puis déterminer sur chaque parabole le point en lequel la tangente est parallèle à la droite d_{AB}.

Applications

Exercice 50

On appelle *bicarrée* une équation de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
On résout une telle équation en posant $u = x^2$.
Résoudre :

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $x^4 - 1 = 0$
c) $x^4 - 16x^2 = 0$
d) $x^4 + x^2 + 1 = 0$
e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Exercice 51

Trouver les zéros et dessiner les graphes de fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Exercice 52

Représenter graphiquement la fonction : $f(x) = x^3 - 2x^2$
Calculer les points d'intersection du graphe de f et celui de $g(x) = x - 2$.

Exercice 53

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{5x+10} + x = 8$
b) $\sqrt{x^2+7} = 4$
c) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{7x+4} = 0$
d) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2} = 1$
e) $\sqrt{5x-4} = \sqrt{2x+1} + 1$

Exercice 54

Déterminer un ensemble de départ D aussi grand que possible de sort que les données suivantes définissent des fonctions :

a) $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x - 1$

b) $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$

c) $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$

d) $D \to \mathbb{R}\setminus\{5\}$, $x \mapsto 3x - 2$

e) $D \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 2x - 4$

f) $D \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{2-2x}$

g) $D \to \mathbb{R}_-$, $x \mapsto x^2 - 6x + 8$

h) $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $D \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-6x+1}{\sqrt{9x^2-3x-4}}$

Exercice 55

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = 3 - 5x$

c) $f(x) = 3x^2 - x - 2$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$

Exercice 56

On donne une fonction homographique f.

a) Déterminer successivement son domaine de définition, ses zéros, son point d'intersection avec l'axe des y, son comportement asymptotique et son signe.

b) Calculer quelques images et tracer le graphe de f.

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-6}$

2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}$

Exercice 57

Soit $f : x \mapsto y = \dfrac{2x+k}{x-3}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Calculer k, sachant que $f(\frac{1}{2}) = -2$.

c) Déterminer la préimage de 4.

d) Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 58

Soit les fonctions suivantes :

$f : x \mapsto -2x$, $\quad g : x \mapsto x+3$, $\quad h : x \mapsto x^2$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$.

Exercice 59

Soit les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-7}{9x+3}$ et $g(x) = \dfrac{3x-2}{4x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis représenter graphiquement, dans un même repère, les fonctions f et g.

Applications

Exercice 60

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont bijectives, et pour celles-là quelle est leur réciproque. Dessiner son graphe et celui de sa réciproque.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x+3$

c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 2$

d) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$
$x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$

e) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$
$x \mapsto \dfrac{4x-3}{2x-2}$

Exercice 61

On considère deux fonctions f et g :

$$f: x \mapsto \frac{2x-7}{x+1} \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \frac{3x-7}{x+k}$$

a) Calculer les compositions : $h = f \circ g$ et $l = g \circ f$.
b) Déterminer k pour que $h(0) = l(0)$.
c) Vérifier que pour cette valeur de k on a l'égalité : $h(x) = l(x)$.
d) On pose $k = -3$. Déterminer ${}^r g$, la fonction réciproque de g.

Exercice 62 (facultatif)

On donne deux bijections f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par leurs expressions fonctionnelles :

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{2}x$$

Calculer les fonctions suivantes :

$$f^{-1},\ g^{-1},\ f \circ g,\ g \circ f,\ f^{-1} \circ g^{-1},\ g^{-1} \circ f^{-1},\ (f \circ g)^{-1},\ (g \circ f)^{-1}$$

Applications

Exercice 63

Les puissances de 10

Pour simplifier l'écriture des "très grands" et " très petits" nombres, on fait appel à la notion scientifique d'un nombre.

Exemples :

- vitesse de la lumière : 300 millions de mètres par seconde

  $v = 300'000'000$ m/s $= 3 \cdot 10^{8}$ m/s
- distance terre-soleil : 150 milliards de mètres

  $d = 150'000'000'000 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
- unité de la longueur : un micromètre

  $1\mu = 0{,}000\ 001$ m $= 10^{-6}$ m

Autres constantes :

Masse d'électron $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Masse du neutron $= 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg

Masse du soleil $= 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Masse de la terre $= 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg

Utiliser les propriétés des puissances pour calculer (utiliser la notion scientifique d'un nombre) :

a) $0{,}0007 \cdot 300 =$

b) $(0{,}004)^{2} =$

c) $24000 : 0{,}008 =$

d) $10^{5} : 10^{-2} \cdot 1000 =$

e) $0{,}00003 : 0{,}006 =$

f) $\dfrac{80000 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}002^{3} \cdot 0{,}00003^{2}}{10^{5} \cdot 0{,}004 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}00006 \cdot 10^{4}} =$

Exercice 64

1. Dessiner le graphe de la fonction suivante :

$$f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2^x$$

2. Déterminer D_f (ensemble de départ) et $f(\mathrm{D})$.
3. Dessiner le graphe de la réciproque f^{-1}, puis définir f^{-1}.

Exercice 65

Calculer :

$5^2 =$ $\quad$ $5^3 =$ $\quad$ $5^4 =$ $\quad$ $5^5 =$

$\log_5 125 =$ $\quad$ $\log_5 3125 =$ $\quad$ $\log_5 25 =$ $\quad$ $\log_5 625 =$

Dire que $a^x = y$ est équivalent à dire que $x = \log_a y$.

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

En français, on dira que y est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x.

Cas particulier :

La base communément utilisée est la base 10.

Le log en base 10 s'appelle le logarithme décimal, on note :

$$\mathbf{\log_{10}(x) = \log(x)}$$

+Exemples

$\log(4) =$ $\quad$ $\log(0) =$

$\log(10\,000) =$ $\quad$ $\log(-3) =$

Exercice 67

Calculer :

a) $\log(1) =$

b) $\log(100) =$

c) $\log(10^7) =$

d) $\log(10^{-4}) =$

e) $\log(0{,}00000001) =$

f) $\log(0{,}00001) =$

Exercice 68

En utilisant une calculatrice, calculer :

a) $\log(4{,}5) + \log(1{,}34) =$ $\quad$ et $\quad$ $\log(4{,}5 \cdot 1{,}34) =$

b) $\log(14{,}345) - \log(23) =$ $\quad$ et $\quad$ $\log(\frac{14{,}345}{23}) =$

c) $\log(\frac{1}{102}) =$ $\quad$ et $\quad$ $-\log(102) =$

d) $\log(6^2) =$ $\quad$ et $\quad$ $2\log(6) =$

Conclusions :

Exercice 69

Soit la fonction

1. $f : x \mapsto \log(x^2 - 5x + 4)$ **2.** $f : x \mapsto \log(\frac{9x - x^3}{5 - 3x})$

a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection du graphe de f avec l'axe des x, avec l'axe des y (si possible).