Chapitre 2

Nombres complexes

Exercice 1.

a) Calculez i^2, i^3, i^4, i^5 *puis exprimez* i^n.

b) Que vaut alors i^{17}, i^{132}, i^{508}, i^{999} *et* i^{5555} *?*

Exercice 2. *Exprimez les nombres complexes suivants sous la forme* $a + bi$ *puis écrivez leurs conjugués.*

$$z_1 = 3 - \sqrt{-4} \qquad z_2 = \sqrt{-4} \qquad z_3 = \sqrt{-9} - \sqrt{3} \qquad z_4 = 5$$

Exercice 3. *Placez dans le plan de Gauss puis calculez le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués et de leurs opposés.*

$$z_1 = -2 + 3i \qquad z_2 = -2 \qquad z_3 = i \qquad z_4 = -2i$$

Exercice 4. *Calculez la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes donnés ci-dessous par leur module et leur argument.*

a) $|z| = 2$, $\varphi = 60^\circ$ *b)* $|z| = 5$, $\varphi = 135^\circ$ *c)* $|z| = 1$, $\varphi = 200^\circ$ *d)* $|z| = 10$, $\varphi = 10^\circ$

Exercice 5. *Donnez le module et l'argument des nombres complexes ci-dessous.*

a) $z = 1 + i$ *b)* $z = 1 - i$ *c)* $z = -3 + 4i$

d) $z = -3i$ *e)* $z = 10$ *f)* $z = -3 + 2i$

Exercice 6. *Soit les nombres complexes* $v = 1 - i$, $w = -2 + 3i$ *et* $z = i$. *Exprimez les nombres suivants sous la forme* $a + bi$.

a) $v - 2w$ *b)* $v - w + z$ *c)* v^2 *d)* v^{13}

e) $(z \cdot v) \cdot z^3$ *f)* $(2v)^2$ *g)* $(z \cdot v)^3$ *h)* $(v \cdot w)^2$

Exercice 7. *Exprimez les nombres suivants sous la forme* $a + bi$.

a) $\dfrac{1}{i}$ *b)* $\dfrac{1}{1+i}$ *c)* $\dfrac{1+i}{1-i}$ *d)* $\dfrac{2-3i}{1+2i}$

e) $\dfrac{5i}{2-i}$ *f)* $\dfrac{12+5i}{3-2i}$ *g)* $\dfrac{11-10i}{3+2i}$ *h)* $\dfrac{-2+i}{2-i}$

i) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$ *j)* $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$ *k)* $\dfrac{1}{i + \dfrac{1}{i + \dfrac{1}{i+1}}}$ **l)* $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{1-i}$

Exercice 8.

1) Démontrez les relations suivantes.

a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ b) $Im(z) = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$ c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

d) $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ f) $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$

2) En utilisant les relations précédentes, remarquez que si $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\boxed{\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n} \quad \text{et} \quad \boxed{|z^n| = |z|^n}$$

Exercice 9. *Dans le plan de Gauss, quel est le lieu géométrique des nombres complexes $z = a + bi$ tels que*

a) $z + \bar{z} = 6$ b) $z \cdot \bar{z} = 9$ c) $(z - 1) \cdot (\bar{z} - 1) = 16$

d) $z \cdot \bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 32$ e) $z \cdot \bar{z} \leq 4$ f) $Re(z) + Im(z) = 1$

g) $|z| = 2$ h) $|z - 2| = 3$ i) $(z + \bar{z})^2 + 2i(z - \bar{z}) + 4 = 0$

Exercice 10. *Trouvez le(s) nombre(s) complexe(s) tel(s) que z, z^2 et $1 - z$ aient le même module.*

Exercice 11. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

a) $z + 1 - 3i = -2 + i$ b) $z + 3iz + 1 = 1 + iz$ c) $(2 + i)z - 2 = i$

d) $3z + 5 = (3 + i)z - 2i$ e) $iz + 4 + i = 1 - i$ f) $z \cdot (1 - 2i) = \frac{1}{1 - 2i}$

Exercice 12. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

a) $2z + 1 - 3i = -2 + i$ b) $(2 + i)z - 2 = 9 + 8i$ c) $iz + 4 + i = 1 - i$

d) $2z + 3iz + i = 1 + iz$ e) $3z + 5 = (3 + i)z - 2i$ f) $(1 + 3i)z + 2i = (2 + 4i)z$

Exercice 13. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants.*

a) $\begin{cases} 3w - 2iz = 4 + i \\ 2iw + z = 1 - i \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 + i)w + z = i \\ (2 + 3i)w + (3 + i)z = 1 \end{cases}$

*c) $\begin{cases} 3z - wi = 4 + i \\ 3iz + 2w = 1 - i \end{cases}$ *d) $\begin{cases} (1 + i)z - w = i \\ z - (3 + i)w = i \end{cases}$

Exercice 14. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

a) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ *b)* $z^2 + z + 1 = 0$ *c)* $z^2 + 9 = 0$

d) $z^2 + (10 - 4i)z + 21 - 20i = 0$ *e)* $z^2 + iz + 6 = 0$ *f)* $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$

g) $z^2 + (5 - 2i)z = 0$ *h)* $z^2 + 18i = 0$ *i)* $(1 + i)z^2 + 4iz - 6 - 2i = 0$

j) $(2 - i)z^2 + (1 - 8i)z - 6 - 12i = 0$ *k)* $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ *l)* $iz^2 + \frac{5}{i}z + 6i = 0$

m) $z^2 - 2z + 2iz - 2i = 0$ *n)* $\frac{(3 - 2i)z}{1 + i} = z + 2$ *o)* $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{-3 + 4i}{5}$

***Exercice 15.** *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

a) $z^2 = 2 - i$ *b)* $z^2 + (5 - i)z + 2 + 5i = 0$ *c)* $z^2 + 5 = 0$

d) $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$ *e)* $z^2 + i = 0$ *f)* $\frac{1}{z} + 5 - 3i = 0$

g) $(1 + i)z + (3 - i)\bar{z} + 4 - 2i = 0$ *h)* $(z - 1)(i - 2) = z$ *i)* $z^2 + (2 + i)z = -3 - 11i$

Exercice 16. *Trouvez un polynôme P dont les zéros sont :*

a) $2, -3$ *et* 5 *b)* $2i$ *et* $-2i$ *c)* $3 + 4i$ *et* $3 - 4i$ *d)* $3 + 4i$ *et* $4 - 3i$

Exercice 17. *Trouvez un polynôme P, à coefficients réels, qui s'annule pour les valeurs de z suivantes :*

a) $z_1 = 2 + 3i$ *b)* $z_1 = i$, $z_2 = 1$ *c)* $z_1 = -i$, $z_2 = 3 + i$

Exercice 18.

a) Trouvez les zéros du polynôme $P(z) = z^4 + 6z^2 + 25$, vérifiez que les solutions sont conjuguées deux à deux puis écrivez $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes à coefficients réels.

b) Trouvez tous les zéros du polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 31z^2 - 66z + 130$ sachant que $z_1 = 1 - 3i$ est un zéro de P.

c) Trouvez tous les zéros du polynôme $P(z) = z^3 + (-7 + 3i)z^2 + (12 - 16i)z + 4 + 28i$ sachant qu'un zéro est purement imaginaire, donc de la forme $z_1 = bi$.

d) Trouvez tous les zéros du polynôme $P(z) = z^4 - 4iz^3 + (3 - 12i)z^2 - (24 + 14i)z + 12 - 36i$ sachant que deux zéros sont purement imaginaires.

Exercice 19. *Soit $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$.*

a) Quelle est la forme trigonométrique de $\bar{z}$? ***Indication :*** *Dans le plan de Gauss, placez un point z puis le point $\bar{z}$.*

b) Quelle est la forme trigonométrique de $-z$?

* **Exercice 20.** *À l'aide de la formule d'Euler, remarquez que les fonctions cosinus et sinus sont des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles :*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exercice 21. *Soit* $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$.

a) ***Inverse :*** *Montrez que* $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\varphi)}$

b) ***Division :*** *Montrez que* $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Exercice 22. *Exprimez les nombres complexes ci-dessous sous leur forme trigonométrique* $r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ *et sous leur forme cartésienne* $a + bi$.

a) $(1-i)^{16}$ *b)* $(1+\sqrt{3}i)^9$ *c)* $(-\sqrt{3}+i)^{12}$ *d)* $(1+i)^{10}$

Exercice 23. *Calculez et représentez dans le plan de Gauss les solutions des équations suivantes. Donnez les réponses sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne* $a + bi$.

a) $z^2 = -8i$ *b)* $z^3 = 27i$ *c)* $z^4 = -4$

d) $z^6 = 64$ *e)* $z^5 = 1$ *f)* $z^5 = 4 - 4i$

Exercice 24.

a) Un des sommets d'un carré du plan complexe est $2 + i$ *et le centre de ce carré est* $1 + 4i$. *Quels sont les autres sommets de ce carré ?*

b) Déterminez le sommet z_3 *d'un triangle équilatéral de sommets* $z_1 = 0$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ *et* z_3.

Exercice 25. *Soit les nombres* $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -2 - 2i$ *et* $z_3 = 1 + i$.

Afin d'interpréter géométriquement les fonctions ci-dessous, calculez leur noyau, les éventuels points invariants et les images de z_1, z_2 *et* z_3. *Représentez à chaque fois ces nombres et leurs images puis décrivez en termes géométriques chaque fonction.*

a) $f(z) = z + 2 - 3i$ *b)* $f(z) = 3z + 6 - 2i$ *c)* $f(z) = iz$

d) $f(z) = 2z$ *e)* $f(z) = \bar{z}$ *f)* $f(z) = -2i \cdot \bar{z}$

Exercice 26. *Déterminez une fonction polynomiale dont les zéros sont* $2i$ *et* $3i$ *et qui admet le nombre* $4i$ *comme point fixe. Quel est le deuxième point fixe de cette fonction ?*

Exercice 27. *Trouvez la fonction associée à chacune des transformations géométriques suivantes.*

a) Translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Homothétie de facteur 2 *centrée à l'origine*

c) Homothétie de facteur 3 *et de centre* $2+2i$

d) Rotation de 180° *autour de l'origine*

e) Rotation de 180° *autour de* $3-2i$

f) Rotation de 90° *autour de l'origine*

g) Rotation de 90° *autour de* $1+2i$

h) Symétrie d'axe imaginaire

Exercice 28. *Soit le triangle de sommets* $A(3;4)$, $B(-2;0)$ *et* $C(1;-6)$.

a) En passant par le plan de Gauss, déterminez l'image de ce triangle par la transformation $T \circ R \circ H$ *où* H *est une homothétie de centre* O *et de facteur* $\sqrt{8}$, R *une rotation de* 45° *autour de l'origine et* T *une translation d'amplitude* $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Quel est le point fixe de cette similitude ?

Exercice 29. ***Similitudes rétrogrades***

Soit les nombres $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ *et* $z_2 = 2 - 3i$. *Quelles sont, dans le plan de Gauss, les transformations géométriques correspondant aux applications suivantes ?*

a) $f(z) = \overline{z_1 \cdot z + z_2}$

b) $f(z) = (\bar{z} + z_2) \cdot z_1$

Exercice 30. ***Inversion par rapport au cercle unité***

Soit la fonction complexe f *définie par* $\boxed{f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}}$.

a) Déterminez le domaine de définition de f.

b) Trouvez l'expression fonctionnelle de la réciproque f^{-1} *et en déduire l'ensemble des images de* f.

c) Calculez les points invariants de f *et situez-les dans le plan de Gauss.*

d) Déterminez l'image de l'axe imaginaire privé de l'origine, c'est-à-dire de $i\mathbb{R}^* = \{z : z = bi, b \in \mathbb{R}^*\}$.

e) Écrivez z *et* $f(z)$ *sous forme trigonométrique.*

Exercice 31. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = (1+i)z + 1}$.

a) Déterminez le point fixe de la fonction f, puis donnez l'interprétation géométrique détaillée la plus simple de f.

Nous définissons la fonction g_n en composant n fois la fonction f avec elle-même :

$$g_n(z) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(z)$$

b) Donnez l'interprétation géométrique détaillée la plus simple de g_4.

c) Déterminez le plus petit entier n tel que l'image du triangle de sommets $z_0 = i$, $z_1 = \sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 2i$ par la fonction g_n soit un triangle d'aire supérieure à 100.

d) Déterminez l'image de l'axe imaginaire privé de l'origine, c'est-à-dire de $i\mathbb{R}^* = \{z : z = bi, b \in \mathbb{R}^*\}$.

e) Écrivez z et $f(z)$ sous forme trigonométrique.

Exercice 32. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = iz^2 + 2}$.

a) Déterminez les zéros de f.

b) Déterminez les solutions de l'équation $f(z) = 8 - 8i$.

c) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss la pré-image de l'axe réel, $f^{-1}(\mathbb{R})$ ainsi que la pré-image de l'axe imaginaire $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

d) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss l'image $f(\mathbb{R})$ de l'axe réel et l'image $f(i\mathbb{R})$ de l'axe imaginaire.

e) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss l'image de la droite $y = x$.

Exercice 33. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = z^2 + 4}$.

a) Déterminez les zéros de f.

b) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(i\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})$ et $f(i\mathbb{R})$.

c) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss l'image de la droite $y = 2x$.

d) Montrez que l'image du cercle unité est un cercle de rayon 1 centré en $(4; 0)$.

Exercice 34. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = \dfrac{1}{z+bi}}$, *avec* $b \in \mathbb{R}_+$.

a) Trouvez la valeur de b sachant que f possède un seul point fixe, puis donnez ce point fixe.

b) Déterminez l'image de la droite $y = x - 2$ privée de $(0; -2)$.

c) Montrez qu'un cercle de rayon r centré en $(0; -2)$ a pour image un autre cercle centré à l'origine et déterminez le rayon de ce nouveau cercle.

Exercice 35. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}}$.

a) Déterminez le domaine de définition et les points fixes de f.

b) Déterminez l'expression de $f \circ f$.

c) Déterminez l'image de l'axe réel.

d) Montrez que l'image de l'axe imaginaire est le cercle unité privé du point $(1; 0)$.

e) Déterminez l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire.

Exercice 36. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = z^2 - i \cdot z}$.

a) Déterminez les zéros et les points fixes de f.

b) Exprimez les zéros de la fonction g définie par $g(z) = f(z^3)$ sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déterminez et représentez dans le plan de Gauss l'ensemble des nombres complxes dont l'image par l'application f est un nombre réel.

d) Résolvez l'équation $f(z) = 9 + 3i$.

e) Prouvez les relations suivantes :

$$f(2+i) = 2 \cdot (2+i) \qquad\qquad f(3+i) = 3 \cdot (3+i)$$
$$Im(z) = 1 \;\Rightarrow\; f(z) = Re(z) \cdot z$$

Exercice 37. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = 2 + \dfrac{3-4i}{z-2}}$.

a) Montrez que la f est égale à sa réciproque f^{-1}.

b) Déterminez les points fixes de f.

c) Dans le plan de Gauss, où se trouvent les nombres complexes z dont l'image ω possède une partie imaginaire égale à 1 ?

Exercice 38. *Soit la fonction complexe f définie par* $\boxed{f(z) = -i\bar{z} + 4 + 4i}$.

a) Déterminez les points fixes de f.

b) Déterminez l'image d' d'une droite d : $y = 6x - 3$ et calculez alors le point d'intersection entre ces deux droites.

c) Dessinez d, d_1 et les points fixes de f dans le plan de Gauss. Interprétez alors géométriquement f.

Nous définissons la fonction complexe g par $g(z) = f(z^2)$.

d) Montrez que l'image de la droite $x = 1$ par g est une parabole. Dessinez cette parabole en utilisant deux carrés par unité.

e) Déterminez tous les points z dont l'image par g est uniquement réelle et représentez cet ensemble dans le plan de Gauss.