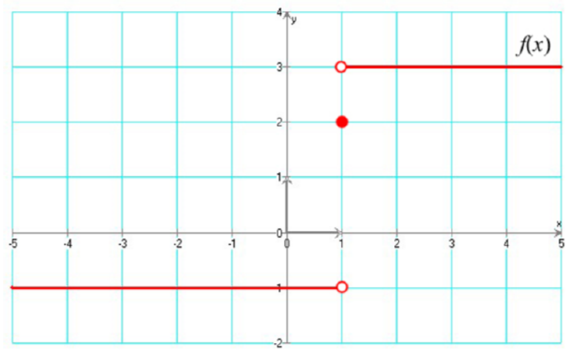
Chapitre 1

Analyse

Exercice 1. *: Soit la fonction* $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

À l'aide de la représentation de f ci-contre, déterminez si possible :



a) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$

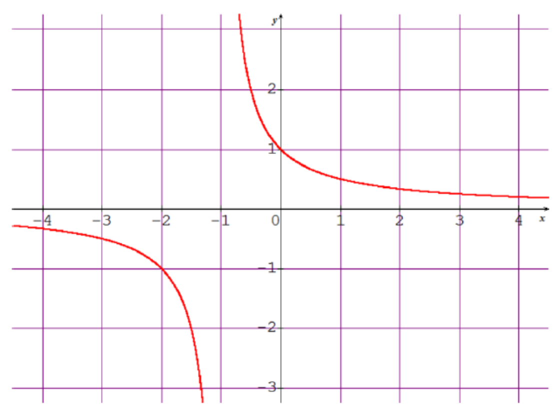
b) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$

c) $f(1)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$

Exercice 2. *: Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

À l'aide de la représentation de f ci-contre, déterminez si possible :



a) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} -1} f(x)$

b) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$

c) $f(-1)$

d) $\lim_{x \longrightarrow -1} f(x)$

e) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$

f) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$

g) $f(1)$

h) $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$

Vérifiez les points a), b), e) et f) en établissant un tableau de valeurs.

Exercice 3. *: Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

À l'aide de la représentation de f *ci-contre, déterminez si possible :*

a) $\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ <}} f(x)$

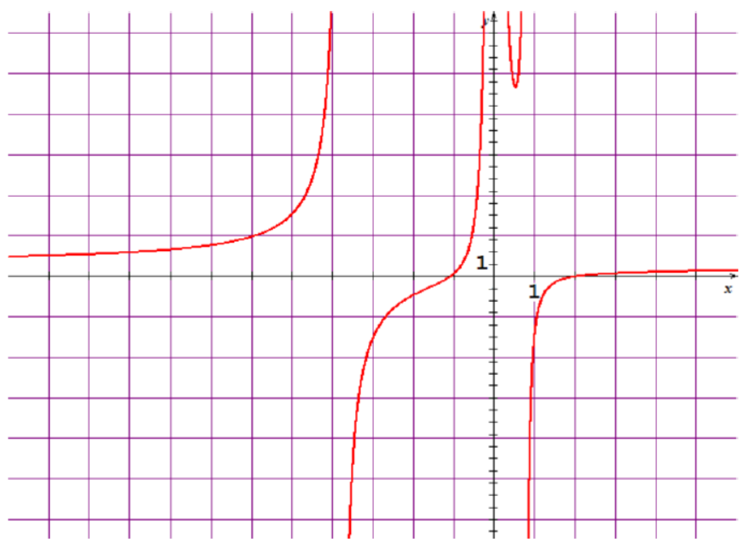
b) $\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x)$

c) $f(0)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$

Vérifiez les points a) et b) en établissant un tableau de valeurs.

Exercice 4. *À l'aide de la représentation de* f *ci-dessous, déterminez si possible les limites suivantes :*



a) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

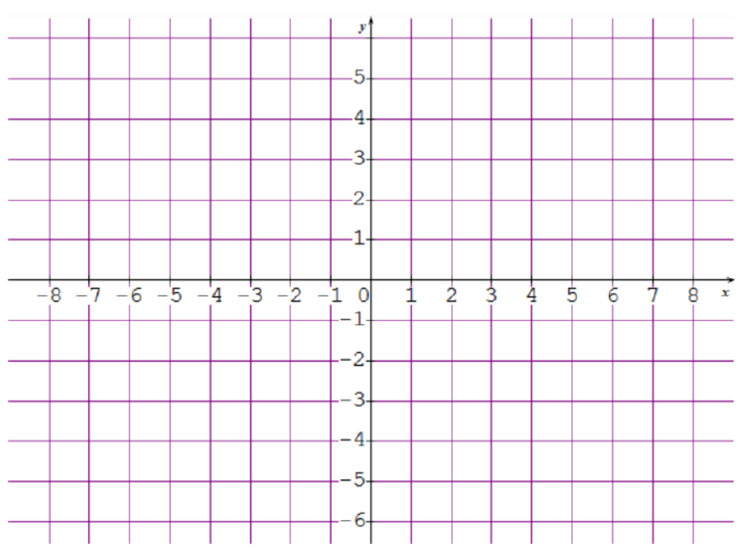
c) $\lim_{x \longrightarrow -6} f(x)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$

e) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

f) Déterminez les équations des asymptotes verticales et horizontales.

Exercice 5. *Dessinez une fonction* g *telle que :*



$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} g(x) = -2\,,$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 3 \\ <}} g(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 3 \\ >}} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} g(x) = \infty$$

$$g \cap Ox = \{(-4;0);(0;0);(5;0)\}$$

Exercice 6. *Calculez, si elles existent, les limites suivantes et lorsqu'il s'agit d'un cas particulier, indiquez le comportement de la fonction au voisinage de cette limite (asymptote verticale, trou, saut).*

a) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-2x}{x+1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-6}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$ *i)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \log(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-1}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$ **l)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Exercice 7. *Même exercice :*

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{|x|}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|+x^2}{x}$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-7x+12}$ *e)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{|x^2-4|}$ *f)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

Exercice 8. *Calculez, si elles existent, les limites suivantes et lorsqu'il s'agit d'un cas particulier, indiquez le comportement de la fonction au voisinage de cette limite (asymptote verticale, trou, saut).*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x\cdot\tan(x)}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2-3x}$ *f)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 9. *Même exercice :*

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *c)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2}$

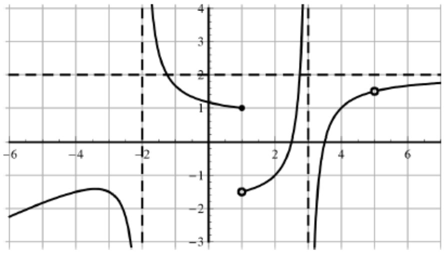
d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{2x}$ *e)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{\tan(x)}$ *f)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$

Exercice 10.

a) En amplifiant la fractions par $\cos(x)+1$*, montrez que* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

**b) Calculez, si elle existe,* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Exercice 11. *Déterminez le domaine de définition et discutez la continuité de la fonction représentée ci-dessous, puis déterminez les limites suivantes :*



$\lim_{x \longrightarrow 5} f(x)$ $\quad$ $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} -2} f(x)$ $\quad$ $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$

$\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$ $\quad$ $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$ $\quad$ $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 12. *Soient les fonctions* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$ *et* $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0,5 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

Dessinez le graphe de ces fonctions et déterminez si elles sont continues à l'origine.

Exercice 13. *Soit* $f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \leq 3 \\ ax + b & si \quad 3 < x \leq 5 \\ -x & si \quad x > 5 \end{cases}$.

Sachant que f est continue sur $\mathbb{R}$, dessinez son graphe puis trouvez les valeurs de a et b.

Exercice 14. *Un parking fait payer 2 francs pour la première heure (ou fraction d'heure) et 1 franc pour chaque heure suivante jusqu'à un maximum journalier de 10 francs.*

1. *Représentez graphiquement ce tarif de parking en fonction du temps.*
2. *Remarquez les discontinuités de cette fonction et expliquez leur signification à quelqu'un qui met sa voiture dans ce garage.*

Exercice 15. *Déterminez si les fonctions ci-dessous sont discontinues pour la valeur de a donnée.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\qquad$ $a = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & si \quad x \neq -1 \\ 6 & si \quad x = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $a = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & si \quad x \neq 4 \\ 6 & si \quad x = 4 \end{cases}$ $\qquad$ $a = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si \quad x > 2 \end{cases}$ $\qquad$ $a = 2$

Exercice 16. *Calculez les limites suivantes :*

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+2}$ *b)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ *c)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$ *e)* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$ *f)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$ *h)* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2+2}{4x+4}$ *i)* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$

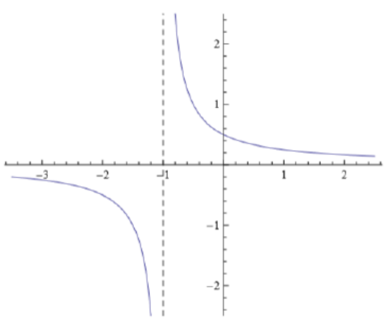
Exercice 17. *Déterminez le domaine de définition, les asymptotes verticales et le comportement asymptotique autour de celles-ci, ainsi que les trous des fonctions suivantes données par leurs expressions fonctionnelles.*

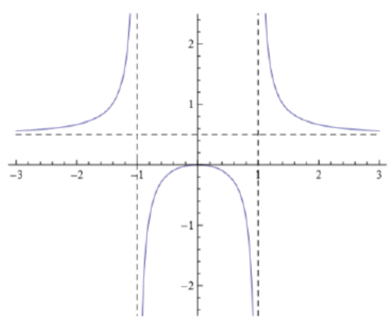
$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} \qquad g(x) = \frac{4-x^2}{x^2-x-2} \qquad h(x) = \frac{3x^4+12x^3+9x^2}{4x^3+8x^2-12x}$$

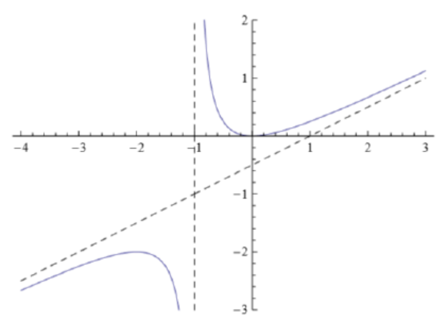
Exercice 18. *Les graphes ci-dessous possèdent des asymptotes* **verticales, horizontales**, *ou* **obliques**. *Donnez l'équation de chaque asymptote, puis trouvez l'expression de chaque fonction :*

$$y = \frac{x^2}{2(x+1)},\ y = \frac{x^2}{2(x^2-1)} \text{ et } y = \frac{1}{2(x+1)} \text{ qui est qui ?}$$

$f_1(x) =$ $f_2(x) =$ $f_3(x) =$







Exercice 19. *Calculez les limites suivantes ; en déduire la présence d'éventuelles asymptotes horizontales pour les fonctions en question :*

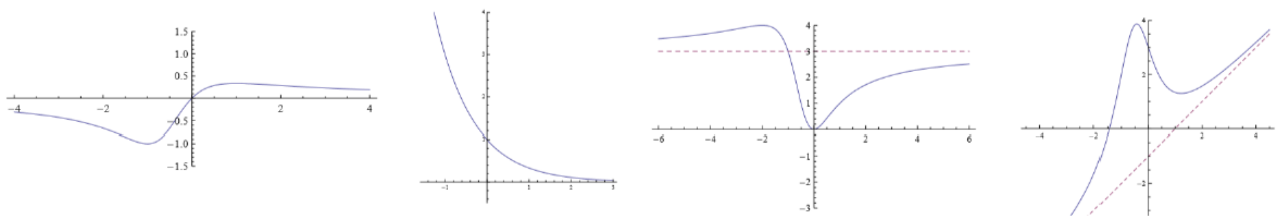
a) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^3-7x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{5x+6}$ *d)* $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-5x+6}{2x^2-7x}$ *f)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^4-3x^3+x}$ *g)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\log(x)}$ *h)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2-1)^3}{(x^3-5x)^2}$

Exercice 20. *Les fonctions suivantes ont-elles des asymptotes horizontales ?*

a) $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2+x+1}$ *b)* $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+x+1}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ *d)* $l(x) = 3^{-x}$

Qui est qui ?



Exercice 21. *Déterminez les asymptotes affines et étudiez le comportement asymptotique (pour ces asymptotes) des fonctions suivantes :*

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{5-x-4x^2}{2x+1}$ *b)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-2x+3}$

c) $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^3+2x+1}{2+10x}$ **d)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^3-x}{5x^2+10x-1}$

Exercice 22. *Déterminez toutes les asymptotes et étudiez le comportement asymptotique des fonctions suivantes :*

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+x-4}{x^2-1}$ *b)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{4x^2+5}{x-2}$ *c)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{8x^4-3x^2+1}{4x^3+10}$

Exercice 23. *Même exercice :*

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

g) $f(x) = 2x+1+\dfrac{3}{x}$ *h)* $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-3}$ *i)* $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$

j) $f(x) = \tan(x)$ *k)* $f(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{(x+1)^2}$ *l)* $f(x) = 5x-3+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 24. *Trouvez une fonction rationnelle f qui possède une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 4$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$.*

Exercice 25. *La fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ passe par le point $(2; 2)$ et possède les asymptotes $x = -3$ et $y = -2x + 1$.*

Retrouvez les coefficients a, b, c et d.

* **Exercice 26.** *Étudiez les fonctions suivantes en déterminant :*

- ⋆ *le domaine de définition, les intersections avec les axes, et le tableau des signes ;*
- ⋆ *l'étude des exclus (éventuels trous, sauts ou asymptotes verticales et comportement asymptotique) ;*
- ⋆ *les éventuelles asymptotes affines et comportement à l'infini ;*
- ⋆ *le graphe de la fonction.*

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2} \qquad x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{x} \qquad x \mapsto h(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{(x + 1)^2}$$

* **Exercice 27.** *De l'eau salée contenant 5 grammes de sel par litre s'écoule à raison de 10 litres par heure dans une grande cuve contenant initialement 10 litres d'eau pure.*

a) *Calculez le volume total d'eau et la quantité de sel de la cuve au bout de t heures.*

b) *Quelle est la concentration en sel après une longue période de temps ?*

Exercice 28. *Déterminez les asymptotes des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$ *b)* $g(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 2x + 3}$ *c)* $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x + 1}$

d) $i(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ *e)* $j(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}$ *f)* $k(x) = 3 + 2\sqrt{x^2 - 3}$

* **Exercice 29.** *Même exercice :*

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$ *b)* $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ *c)* $h(x) = 5x - \sqrt{4x^2 + 2x}$

Exercice 30. *La parabole d'équation $y =$ .... est représentée ci-dessous.*

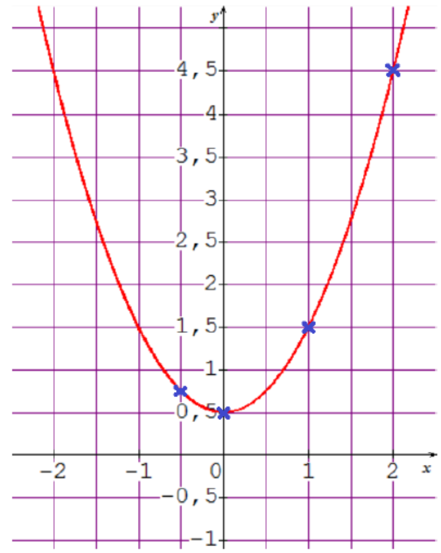
a) *Dessinez le mieux possible les tangentes à la parabole en $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.*

b) *Estimez au mieux la valeur de la pente de chaque tangente en complétant ci-dessous :*

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \ldots\ldots \qquad f'(0) = \ldots\ldots$$

$$f'(1) = \ldots\ldots \qquad f'(2) = \ldots\ldots$$

c) *Grâce aux valeurs de b), déduisez : $f'(x) = \ldots\ldots$*



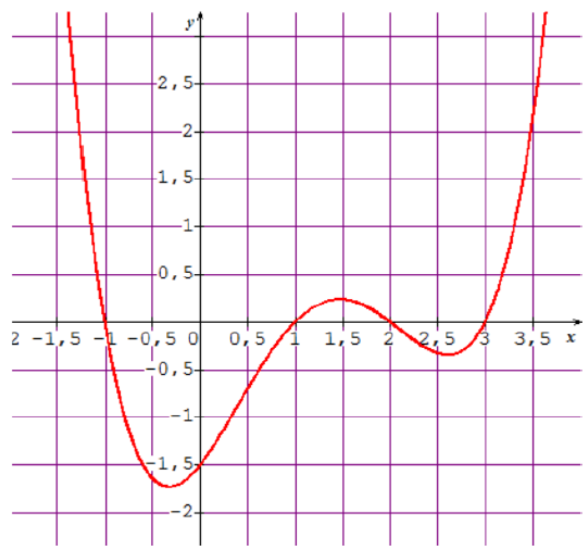
Exercice 31. *Sur le graphe de la fonction $f(x)$ ci-contre, indiquez les valeurs approximatives de x pour lesquelles :*

a) $f(x) = 0$ *b)* $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 1$ *d)* $f'(x) = -4$

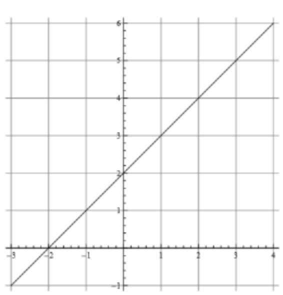
e) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

Mettez en évidence les points de f concernés en traçant les tangentes au graphe de f ayant les pentes indiquées.



Exercice 32. *Complétez :*

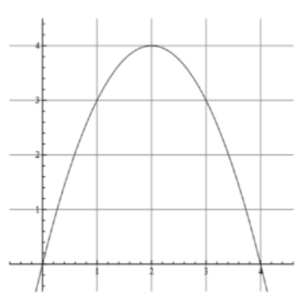
1) $f(x) =$



$f(0) =$

$f'(0) =$

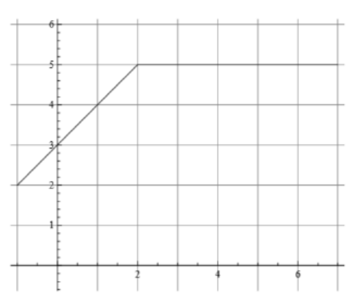
2) $g(x) =$



$g(2) =$

$g'(2) =$

3) $h(x) =$



$h(6) =$ $h(2) =$

$h'(6) =$ $h'(2) =$

Exercice 33.

a) *Soit la fonction* $f : x \longmapsto y = 2x + 3$.
Que vaut $f(1)$ *? Que vaut* $f'(1)$ *? Que vaut* $f'(x)$ *? Géométriquement, à quoi correspond* $f'(x)$ *?*

b) *Que pouvons-nous dire d'une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *dont la dérivée vaut toujours 0 ?*

c) *Esquissez la fonction* $f : x \longmapsto y = |x|$. *Est-elle dérivable en* $x_0 = 0$ *?*

d) *Esquissez la fonction* $f : x \longmapsto y = \frac{1}{x}$. *Pour quel* x_0, $f'(x_0)$ *n'est-elle pas définie ?*

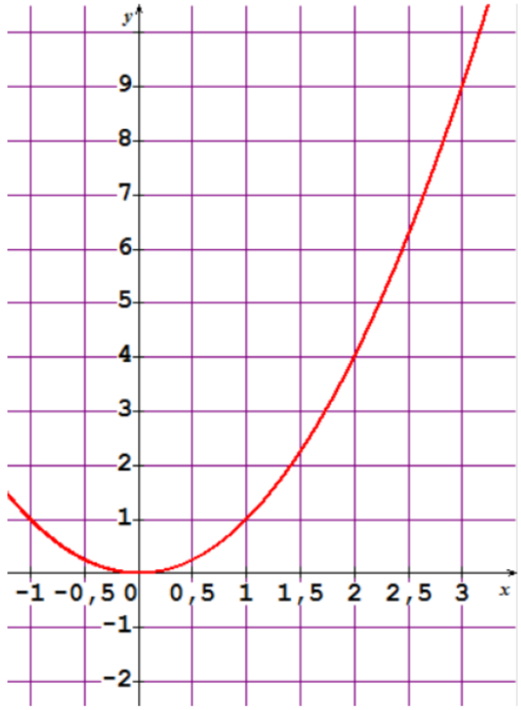
Exercice 34. *Dessinez le graphe d'une fonction continue* f *telle que* $f(2) = 1$, $f'(2) = 0$, $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$, $f(7) = 0$ *et* $f'(7)$ *n'est pas définie.*

Exercice 35. ***But :*** *Déterminer la pente de la tangente d'une fonction* f *à partir de son expression fonctionnelle* $f(x)$.

En utilisant le graphe de la fonction $f(x) = x^2$ *ci-derrière, réalisez les étapes suivantes :*

1. *Tracez la sécante* s_1 *au graphe de* f *passant par* $A(1; f(1))$ *et* $B_1(3; f(3))$.
2. *Calculez la pente de la sécante* s_1.
3. *Tracez la sécante* s_2 *au graphe de* f *passant par* A *et* $B_2(2; f(2))$.
4. *Calculez la pente de la sécante* s_2.
5. *Tracez la sécante* s_3 *au graphe de* f *passant par* A *et* $B_3(1,5; f(1,5))$.
6. *Calculez la pente de la sécante* s_3.
7. *Tracez la tangente* t *au graphe de la fonction* f *en* A.
8. *Calculez la pente de la tangente* t *qui correspond à* $f'(1)$. *Remarquez que les pentes des sécantes tracées se rapprochent de la pente de* t *et donc de* $f'(1)$.
9. *Afin d'approcher au mieux* $f'(1)$ *sans recourir à son graphe :*
   a) *calculez la pente de la sécante* s_x *passant par* A *et* $B_x(1 + \Delta x; f(1 + \Delta x))$,
   b) *puis calculez la limite de cette pente lorsque* Δx *tend vers* 0.
10. *Comparez cette limite avec la pente de la tangente* t.

Reprenez la stratégie du point 9. pour déterminer $f'(2)$ *puis* $f'(x)$.



Exercice 36.

a) *En utilisant la définition algébrique de la dérivée, déterminez la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 1 - x \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$
$$^*i(x) = \frac{1}{3-2x} \qquad j(x) = x^3 \qquad k(x) = \sqrt{x}$$
$$l(x) = 6 \qquad m(x) = ax + b \qquad n(x) = \frac{1}{x^2}$$

b) *Calculez $f'(2)$, $g'(1)$ et $h'(-2)$.*

c) *Déterminez l'équation de la tangente au graphe de g au point P d'abscisse 1. Déterminez alors l'angle entre cette tangente et l'axe Ox.*

Aide : *pour calculer cet angle, faîte un schéma de la situation puis utilisez une des formules trigonométriques.*

***Exercice 37.** *Donnez l'équation de la tangente t au graphe de la fonction*

$$f : x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x+2}$$ *au point P d'abscisse 4.*

Exercice 38.

a) En quel(s) point(s) du graphe de $f : y = x^2$*, la tangente est-elle parallèle à la droite* $d : 2x + 3y - 2017 = 0$ *?*

b) Quel angle cette tangente forme-t-elle avec l'axe des x *?*

Exercice 39. *En reprenant les résultats des exercices précédents, complétez le tableau ci-dessous puis établissez la règle de dérivation de* $f(x) = x^n$ *:*

$f(x)$	$1 = x^0$	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\ldots$
$f'(x)$								$\ldots$

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Exercice 40. *A l'aide de la règle de dérivation de* $f(x) = x^n$*, déterminez les dérivées* $f'(x)$ *des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = x^9$ *b)* $f(x) = x^{12}$ *c)* $f(x) = x^{134}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *e)* $f(x) = \dfrac{1}{x^{14}}$ *f)* $f(x) = \sqrt[4]{x}$

g) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ **h)* $f(x) = \sqrt[25]{x^{37}}$ **i)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$

Exercice 41. *En utilisant ces rappels, les propriétés des limites ainsi que la définition algébrique de la dérivée, déterminez la dérivée des fonctions* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$		

Exercice 42. *Démontrez la règle de dérivation N° 4 en utilisant la règle N° 3 pour dériver l'égalité* $\dfrac{u(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x)$.

Exercice 43. *Dérivez les fonctions suivantes en vous aidant des règles de dérivation :*

a) $f(x) = \overbrace{x^3}^{u(x)} \overbrace{- \cos(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

b) $f(x) = \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{u(x)} + \overbrace{\sqrt[3]{x}}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

c) $f(x) = \overbrace{\ 5\ }^{\lambda} \overbrace{x^{100}}^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

d) $f(x) = \overbrace{2x^2}^{\lambda \cdot u(x)} \overbrace{-3x}^{\mu \cdot v(x)} \overbrace{+4}^{\nu \cdot w(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

e) $f(x) = \overbrace{x^2}^{u(x)} \overbrace{\cos(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

f) $f(x) = \overbrace{2\sqrt{x}}^{\lambda \cdot u(x)} \overbrace{\sin(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

g) $f(x) = \frac{\overbrace{3x^2 - 2}^{u(x)}}{\underbrace{x^2 + 1}_{v(x)}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

Exercice 44. *A l'aide de la 4ème règle de dérivation, déterminez la dérivée de la fonction* $\tan(x)$ *et exprimez-la de deux manières différentes.*

Exercice 45. *Montrez que pour toute fonction dérivable* $f \neq 0$ *:* $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Exercice 46. ***Tableau des dérivées des fonctions usuelles.*** *Complétez :*

$f(x)$	*1*	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$f'(x)$										

Exercice 47. *Calculez les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f_1(x) = x^3 - 5x + \dfrac{3}{x^2}$ *b)* $f_2(x) = 6\sqrt{x} - x$ *c)* $f_3(x) = 3x^2\sqrt{x}$

d) $f_4(x) = a\sin(x) - b\cos(x)$ *e)* $f_5(x) = \cos^2(x)$ *f)* $f_6(x) = \dfrac{2x^3+7x}{5x+3}$

g) $f_7(x) = 2(x-3)(x+6)$ *h)* $f_8(x) = \sqrt[5]{x^2}$ *i)* $f_9(x) = x\cos(x)$

j) $f_{10}(x) = 8\cos(x) - 4x^2$ *k)* $f_{11}(x) = \sin^2(x)$ *l)* $f_{12}(x) = \dfrac{x^{-4}}{12} - \dfrac{6}{x^{-2}}$

m) $f_{13}(x) = (2x+7)\tan(x)$ *n)* $f_{14}(x) = \dfrac{2}{\sin(x)}$ *o)* $f_{15}(x) = \dfrac{4\cos(x)}{1+\sin(x)}$

***Exercice 48.** *Même exercice :*

a) $f_1(x) = x^3(sin(x)+1)$ *b)* $f_2(x) = \sin(x)\cos(x)$ *c)* $f_3(x) = \dfrac{x}{1+4x}$

d) $f_4(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *e)* $f_5(x) = (4-x^2)\sin(x)$ *f)* $f_6(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$

g) $f_7(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ *h)* $f_8(x) = 5\sin(x) - 3x^2$ *i)* $f_9(x) = 5\cos(x) - \dfrac{3}{x}$

j) $f_{10}(x) = 9x^5$ *k)* $f_{11}(x) = 2x^3(4x^3 - 3x)$ *l)* $f_{12}(x) = 4x^2\sqrt{x}$

Exercice 49. *Déterminez les coordonnées des points de la courbe* $y = 4x^3 + 15x^2 - \frac{30}{2}x + 2$ *en lesquels la tangente a une pente égale à 3.*

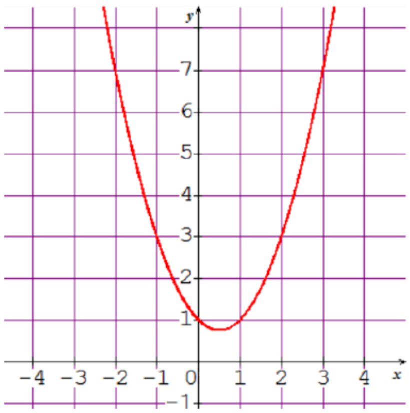
Exercice 50. *Déterminez les coordonnées des points de la courbe* $y = x^4 - 6x^2 + 8x$ *en lesquels la pente de la tangente est nulle.*

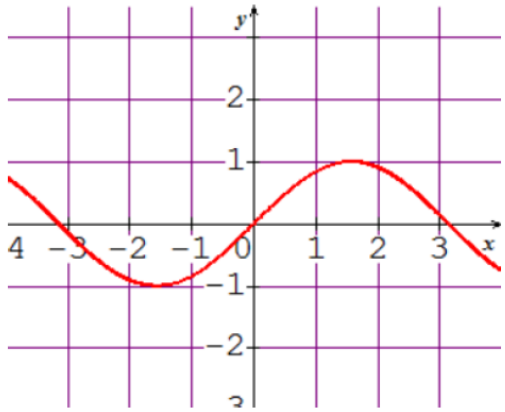
Exercice 51. *En un point de la courbe* $y = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$, *l'équation de la tangente est* $y = 6x - 7$. *Déterminez la valeur de* k *ainsi que les coordonnées du point.*

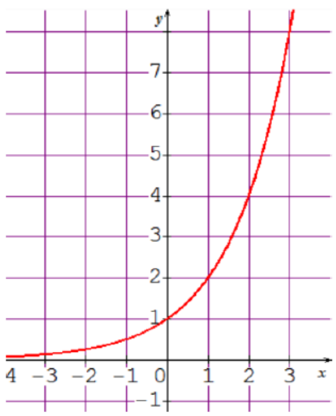
Exercice 52. *Pour chacune des fonctions dont le graphe est représenté ci-dessous, complétez un tableau du type (à l'aide de sa représentation !) :*

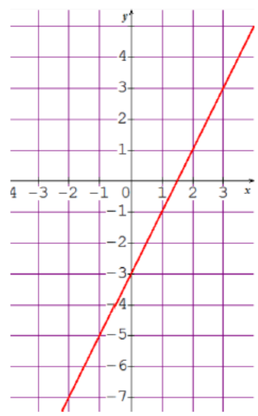
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

puis esquissez le graphe de la dérivée dans le même système d'axe que celui de la fonction.









Exercice 53. *Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée $f'(x)$ de la fonction* $f : x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ *s'annule-t-elle ? Avec quoi ce résultat peut-il être mis en lien ?*

Exercice 54. *Déterminez l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = 2x^2 - 6x + 1$ au point $T(-1; ?)$. Quel angle cette tangente forme-t-elle avec l'axe des x ?*

Exercice 55. *En quel point la tangente au graphe de $f : x \longmapsto y = \sqrt{x}$ est-elle parallèle à la droite $d : x - 4y - 23 = 0$?*

Exercice 56. *Trouver la fonction $x \longmapsto y = f(x) = x^2 + bx + c$ dont le graphe admet la droite $d : 2x - y - 1 = 0$ comme tangente au point d'abscisse $x = 3$.*

* **Exercice 57.** *Déterminez les coefficients a, b et c de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par le point $(5;8)$ et dont la pente de la tangente au point $(2;2)$ est de -4.*

Exercice 58. *Quels sont les points de la courbe d'équation $\mathcal{C} : y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ? Donnez ensuite l'équation de ces tangentes.*

Exercice 59. *Soit $f(x) = (3x+1)^2$.*

a) *Déterminez $f'(x)$ sans développer f.*

b) *Développez $f(x)$.*

c) *Déterminez $f'(x)$ à partir de b), puis factorisez votre réponse.*

d) *Comparez les réponses de a) et c). D'où peut provenir l'éventuelle différence ?*

Exercice 60. *Calculez les dérivées des fonctions composées suivantes :*

a) $x \mapsto y = (\frac{1}{2}x - 5)^2$	*b)* $x \mapsto y = (x^2+2)^3$	*c)* $x \mapsto y = (4x^2 - 7x + 3)^4$
d) $x \mapsto y = \sqrt{8x^2 - 2x + 3}$	*e)* $x \mapsto y = \cos^3(x)$	*f)* $x \mapsto y = 2\sin(x^2+1)$
g) $x \mapsto y = \sqrt[3]{\sin(x)}$	*h)* $x \mapsto y = x^3 \sin(2x)$	*i)* $x \mapsto y = ((x^2-1)^5 + 1)^2$
j) $x \mapsto y = \cos^2(x^2)$	*k)* $x \mapsto y = \sqrt{x}\sin(3x)$	*l)* $x \mapsto y = \sqrt{1 + \cos^3(x)}$
m) $x \mapsto y = \sin(2\sqrt{x})$	*n)* $x \mapsto y = \cos(\sin(x))$	*o)* $x \mapsto y = \sin(2x)\cos(3x)$

* **Exercice 61.** *Même exercice :*

a) $f(x) = (x^3 - 2x)^4$	*b)* $f(x) = (x^2+3)^{10}$	*c)* $f(x) = (4x^2 - x + 2)^5$
d) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 4x - 1}$	*e)* $f(x) = \cos^2(x)$	*f)* $f(x) = \sin^4(x)$
g) $f(x) = (\sqrt{x})^8$	*h)* $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$	*i)* $f(x) = \sqrt{3x^5 - 2}$
j) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$	*k)* $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^5}$	*l)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

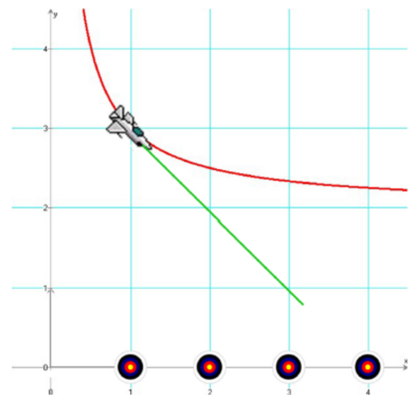
Exercice 62. *Déterminez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{5x+1}$ en son point d'abscisse $x = 3$.*

Exercice 63. *Déterminez une équation de la tangente à chacune des courbes suivantes en son point d'abscisse x_0 :*

a) $y = \dfrac{3x-2}{5x-9}$, $x_0 = 2$ *b)* $y = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$, $x_0 = 2$ *c)* $y = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$, $x_0 = \pi$

***Exercice 64.** *Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, nous pouvons voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3 et 4.*

Nous savons que la trajectoire de l'avion a pour équation $y = \dfrac{2x+1}{x}$, $x > 0$.



a) La cible N° 4 sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $(1;3)$ *?*

b) Déterminez l'abscisse permettant d'atteindre le centre de la cible N° 2.

Exercice 65. *Calculez les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $x \mapsto y = \arccos(x)$ *b)* $x \mapsto y = \arcsin(x)$ *c)* $x \mapsto y = \arctan(x)$

d) $x \mapsto y = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *e)* $x \mapsto y = x \cdot \arcsin(x)$ *f)* $x \mapsto y = \arccos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 66.

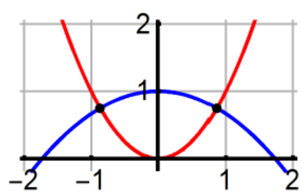
a) Déterminez l'angle obtu entre les paraboles $\mathcal{P}_1 : y = x^2 - 3$ *et* $\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + 2x + 1$ *en chaque point d'intersection.*

b) Déterminez l'angle aigu formé par les graphes des fonctions définies par

1) $f(x) = x^3 + x$ *et* $g(x) = 2x^2 + 2$ *2)* $h(x) = \cos(x)$ *et* $i(x) = \sin(x)$

Exercice 67.

a) Soit les fonctions $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = 1 - ax^2$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

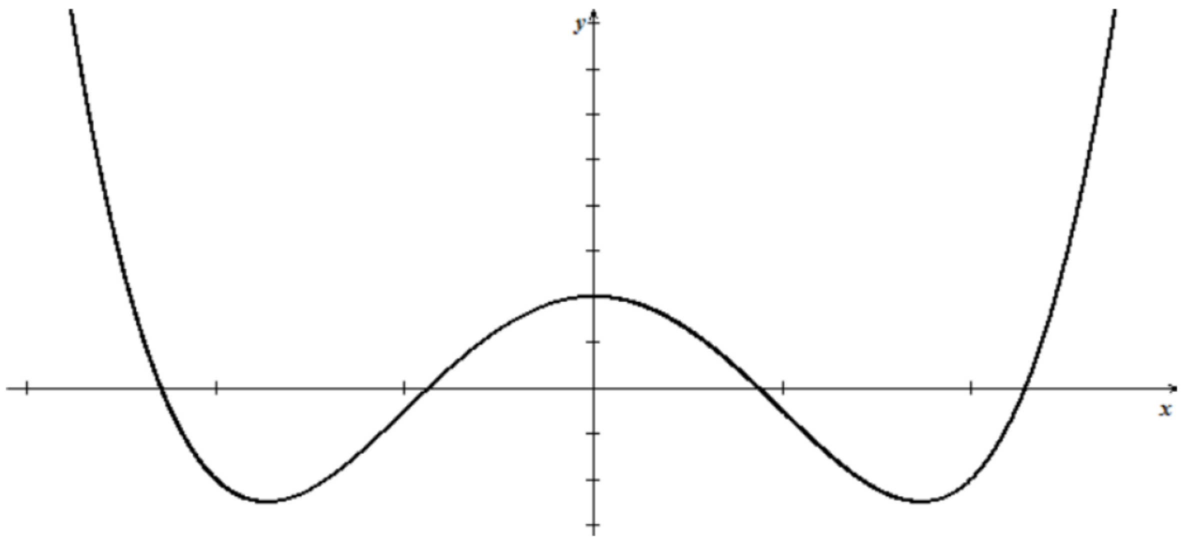


Trouvez les valeurs de a pour lesquelles les graphes de f et g se coupent puis trouvez la valeur de a pour laquelle les graphes de f et g se coupent deux fois à angle droit.

**b) Faire de même avec les fonctions* $f(x) = 2x^2 - a$ *et* $g(x) = \dfrac{x^2}{a}$.

Exercice 68. *Soit le graphe d'une fonction f représentée ci-dessous.*

1. *Passez en rouge sur la partie du graphe de f qui est* **décroissante** *et en bleu sur la partie* **croissante***.*
2. *Placez en vert le signe « — · — » aux points précis où le graphe de f est « plat », c'est-à-dire où sa* **croissance est nulle***.*
3. *Dans les mêmes couleurs mais de manière légère, tracez dans chacune des zones décrites une tangente au graphe.*
4. *Que dire de la pente de la tangente au graphe de f en lien avec la croissance de cette fonction ?*
5. *Que dire du signe de la dérivée de f en lien avec la croissance de cette fonction ?*



Exercice 69. *Étudiez les points à tangente horizontale des fonctions suivantes en déterminant leurs coordonnées et leur type :*

a) $y = \frac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 12x$ *b)* $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ *c)* $y = (x^2-4)^2$

***Exercice 70.** *Déterminez les coordonnées des points à tangente horizontale de la fonction*

$$f : x \longmapsto y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x.$$

Exercice 71. *Dessinez un graphe possible de $y = f(x)$ connaissant les informations suivantes sur la dérivée :*

- ⋆ $f'(x) > 0$ *pour* $1 < x < 3$;
- ⋆ $f'(x) < 0$ *pour* $x < 1$ *ou* $x > 3$;
- ⋆ $f'(x) = 0$ *pour* $x = 1$ *et* $x = 3$;

Exercice 72. *Dessinez une courbe dont la pente partout...*

a) *...positive croît continûment.*

b) *...positive décroît continûment.*

c) *...négative croît continûment.*

d) *...négative décroît continûment.*

***Exercice 73.** *Dans une expérience de laboratoire, le nombre de bactéries après* t *heures est donné par* $n = f(t)$.

a) *Quelle est la signification de* $f'(5)$ *? En quelles unités s'exprime* $f'(5)$ *?*

b) *Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée, lequel des deux nombres* $f'(5)$ *et* $f'(10)$ *sera le plus grand ?*

***Exercice 74.** *Montrez que le graphe de la fonction* $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+2}$ *ne possède aucun point à tangente horizontale.*

***Exercice 75.** *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$.

a) *Déterminez les points à tangente horizontale du graphe de* f *puis établir le tableau de croissance de* f.

b) *Déterminez tous les zéros de* f *puis représentez son graphe.*

Exercice 76. *Pour quelles valeurs de* a *la fonction* $f : y = x^3 + ax^2 + x$ *n'admet-elle aucun point à tangente horizontale ?*

Exercice 77. *Vrai ou faux ? La fonction* $f : x \longmapsto y = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ *est toujours croissante.*

***Exercice 78.** *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{x \cdot (x-a)}{x^2+4}$, *avec* $a \in \mathbb{R}$.

a) *Montrez que pour toute valeur de* $a \neq 0$, *le graphe de* f *admet deux points à tangente horizontale.*

b) *Combien de points à tangente horizontale le graphe de* f *possède-t-il si* $a = 0$ *?*

*Exercice 79.

a) *Soit la fonction* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *Déterminez les valeurs de* a *et* b *de telle sorte que le point* $T(1;1)$ *soit un point à tangente horizontale. Déterminez son type.*

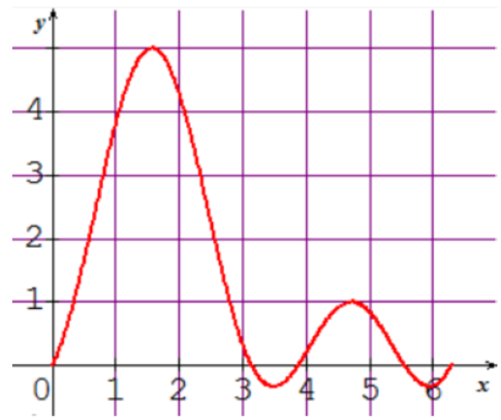
b) *Sachant que* $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *admet la tangente* $y = -2,5x + 4$ *au point d'abscisse -1, trouvez les valeurs de* a *et* b.

Exercice 80.

Le graphe de la fonction $f(x) = 3\sin^2(x) + 2\sin(x)$, *avec* $x \in \mathbb{R}$, *est représenté.*

a) *Déterminez les zéros de* f *ainsi que les coordonnées des points à tangente horizontale.*

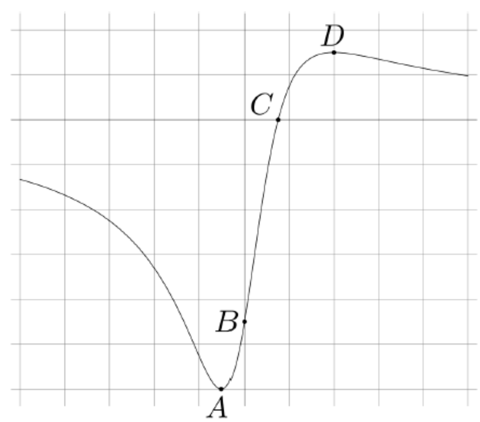
b) *Établir une équation de la tangente au graphe de* f *en son point d'abscisse* π.



*Exercice 81.

Voici le graphe de la fonction

$$f : x \longmapsto y = \frac{3(4x-3)}{2(x^2+1)}.$$



a) *Quel est l'ensemble de définition de* f *?*

b) *Donnez les équations des éventuelles asymptotes du graphe de* f.

c) *Calculez les coordonnées (valeurs exactes !) des points* A, B, C *et* D.

d) *Faîtes le tableau de croissance de* f.

e) *Sous quel angle le graphe de* f *coupe-t-il* Oy *?*

Exercice 82. *Soit la fonction* $f(x) = \frac{1}{10}x(6-x)(x+3)$.

a) *Déterminez les points à tangente horizontale du graphe de* f *puis établissez le tableau de croissance de* f.

b) *Déterminez les éventuels points d'inflexion du graphe de* f *puis établissez le tableau de courbure de* f.

c) *Représentez le graphe de* f.

Exercice 83. *Étudiez les fonctions suivantes :*

a) $y = \dfrac{-3x^2+12}{(x+1)^2}$ *b)* $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ *c)* $y = -\dfrac{(x-2)^2}{4(x+1)}$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *e)* $y = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$ *f)* $y = \dfrac{x^2-3x}{2x+2}$

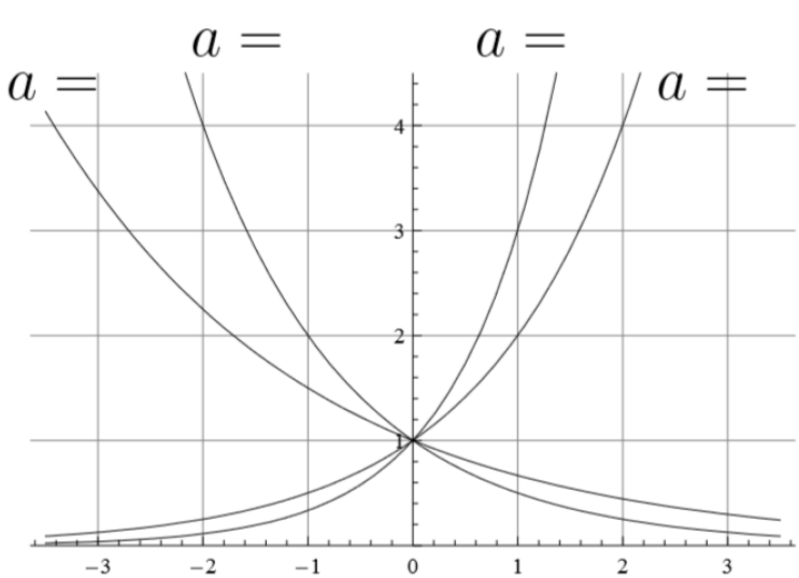
g) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ **h)* $y = \dfrac{x^2-3x}{2x+2}$ **i)* $y = \dfrac{4x+12}{(x+2)^2}$

Exercice 84. *Étudiez, sur l'intervalle* $[0; 2\pi]$ *:*

a) $f(x) = 3\sin(x) + 4\cos(x)$ *b)* $g(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$ *c)* $h(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

Exercice 85. ***Graphe***

Complétez les valeurs des bases des fonctions exponentielles dont les graphes sont représentés ci-dessous :



Exercice 86. *Dessinez le graphe de la fonction exponentielle.*

Exercice 87.

a) Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{5x} \qquad g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad h(x) = xe^{x} \qquad i(x) = e^{\cos(2x)}$$

$$j(x) = e^{\frac{2}{x}} \qquad k(x) = \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad l(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x} \qquad m(x) = (x^2 - 5) \cdot e^{x}$$

$$n(x) = 2e^{2x} - 3e^{-2x} \qquad o(x) = 3e^{-3x^2} \qquad p(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 5} \qquad q(x) = (-x^2 + 5x) \cdot e^{-x}$$

b) Déterminez le domaine de définition des fonctions f, h, k, l et p.

c) Déterminez le comportement asymptotique des fonctions f et g.

Exercice 88.

a) Déterminez l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = (e^{2x} - 3)^3$ au point d'abscisse nulle.

b) Idem avec la fonction $g(x) = (x + 3) \cdot e^{-x}$

Exercice 89. *Déterminez les points de la courbe $y = e^{2x} - 8e^{x} + 9x$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $d : 3x - y - 21 = 0$.*

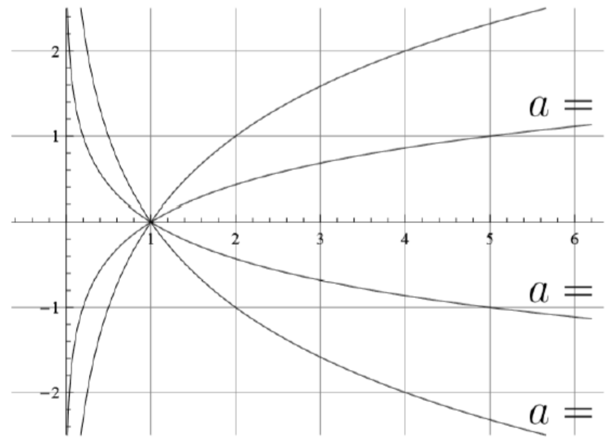
Exercice 90. *Soit la fonction $f(x) = (x^2 + k) \cdot e^{-x}$, où $k \in \mathbb{R}$.*

a) Déterminez la valeur de k pour laquelle le graphe de f admet un seul point à tangente horizontale puis établir le tableau de croissance de f.

b) Déterminez la valeur de k pour laquelle le graphe de f admet un point à tangente horizontale d'abscisse égale à -3 puis établir de croissance de f.

Exercice 91. ***Graphe***

Complétez les valeurs des bases des fonctions logarithmiques dont les graphes sont représentés ci-dessous :



Exercice 92. *Complétez :* $\ln(e) =$ *et* $\ln(1) =$

Exercice 93. *Simplifiez au maximum les logarithmes suivants :*

a) $\log(x^5 \cdot \sqrt{y})$ *b)* $\log\left(\dfrac{x^7 \cdot y^4}{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y}}\right)$

c) $\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \log_4(5)$ **d)* $2\ln(a) - \dfrac{1}{2}\ln(b) + 3\ln(c)$

Exercice 94. *Résolvez les équations suivantes :*

a) $3\ln(x) = 2$ *b)* $\ln(2x) = 2\ln(x)$ *c)* $\ln(x+3) = \ln(x) + \ln(3)$

d) $\ln^2(x) = \ln(x^2)$ *e)* $\ln^2(x) + 3\ln(x) + 2 = 0$ **f)* $6\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$

g) $e^{2x} = 5$ *h)* $e^{-x+1} = 10$ *i)* $2e^x - 5e^{-x} = 0$

j) $3e^{2x} = 5e^x$ *k)* $9 - 3e^x = 2e^{2x}$ *l)* $8e^x + \dfrac{1}{e^x} = 6$

Exercice 95. *Résolvez les équations suivantes :*

a) $\log(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \log(20) - \log(2)$ *b)* $\log(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \log(9) + \dfrac{1}{3} \cdot \log(8)$

c) $\log(3x-4) = 2 \cdot \log(3)$ **d)* $\log(x+1) + \log(x+2) = \log(5x+5)$

**e)* $\log(3x+1) = 3$ *f)* $\log(8x-6) - \log(x-4) = 1$

Exercice 96. *Résolvez les équations suivantes :*

1) $3^x = 5$ *2)* $3 \cdot 5^{x-1} = 120$ **3)* $0,9^x = 0,01$

Exercice 97. *Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 3\ln(x) \qquad g(x) = \ln(2x) \qquad h(x) = x\ln(x)$$

Exercice 98. *Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 8^x \qquad g(x) = 3^{5x} \qquad h(x) = x \cdot 7^{-x}$$

Exercice 99. ***Un peu de tout !***

Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x-1) \qquad g(x) = 3^{x^2} \qquad h(x) = \ln(-3x+2)$$

$$i(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \qquad j(x) = \cos(x)e^{-x} \qquad k(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$l(x) = \ln\left(\sqrt{3-x^2}\right) \qquad m(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \qquad n(x) = (x^2-4)\cdot\ln(x)$$

$$o(x) = 2x\cdot\ln(x^2+1) \qquad p(x) = \ln^2(x) \qquad q(x) = 3\ln^2(x) - 2\ln(x)$$

$$r(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \qquad s(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$$

***Exercice 100.** *Même exercice :*

$$f(x) = 2e^{4-2,5x} \qquad g(x) = 3^x \qquad h(x) = x^2e^{1-x}$$

$$i(x) = \frac{e^x}{x+2} \qquad j(x) = (3x^2-5x+1)e^{3x} \qquad k(x) = \ln(\cos(x))$$

$$l(x) = \frac{2e^x+1}{e^{-x}+1} \qquad m(x) = \ln(ax+b) \qquad n(x) = \ln(-x^2+6)$$

$$o(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)$$

Exercice 101. *Calculez les limites suivantes :*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$ *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^{100} - x^{55}}$ *c)* $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x)$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\ln(x)}{x}$ *e)* $\lim\limits_{x \to 0} (x+1)^2 \log_a(x)$ *f)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^2 - 3x + 4)^3}{(2x^3 + x^2 - 5)^2}$ *h)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{500} \ln(x)}{2^x}$ *i)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x - 4}{3e^x + 5}$

j) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

Exercice 102. *Déterminez toutes les asymptotes des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = xe^x$ *b)* $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ *c)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{2e^x - 4}{3e^x + 5}$ *e)* $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$ *f)* $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 103. *Déterminez l'angle aigu formé par les graphes des fonctions suivantes en leur(s) point(s) d'intersection.*

a) $f(x) = 2e^x$ *et* $g(x) = xe^x$ *b)* $h(x) = \log_2(x)$ *et* $i(x) = \log_5(x)$

**c)* $j(x) = e^{x+2}$ *et* $k(x) = e^{-x}$ *d)* $l(x) = \ln^2(x)$ *et* $m(x) = \ln^3(x)$

Exercice 104. *Étudiez les fonctions suivantes en reprenant les points décrits à la section 5 de ce chapitre :*

$f(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$ $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $h(x) = x \cdot \ln(x)$

$^*i(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ $j(x) = \log_x(2)$ $k(x) = \ln(x^2 + 4)$

$l(x) = \dfrac{e^x}{2x+1}$ $m(x) = \dfrac{4\ln^2(x) - 5}{x}$ $^*n(x) = \dfrac{3\ln(|x|)}{x}$

$o(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x))$ $^*p(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$ $q(x) = (2x^2 - 4)e^{-x}$

$^*r(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-3}$ $s(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - 3$ $^*t(x) = (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}}$

Exercice 105.

a) Étudiez la fonction sinus hyperbolique : $f(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

b) Étudiez la fonction cosinus hyperbolique : $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

c) Vérifiez que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

d) Étudiez la fonction tangente hyperbolique : $f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Exercice 106. *Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans le cercle trigonométrique ?*

Exercice 107. *Minimisez le périmètre d'un rectangle dont l'aire vaut* $1m^2$.

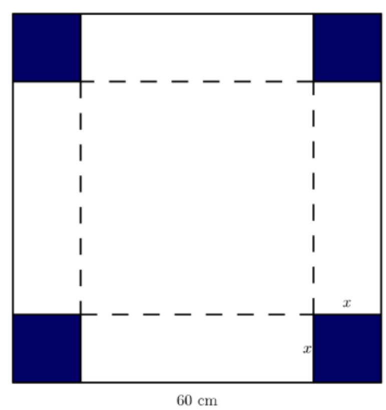
***Exercice 108.** *Quelle est la plus grande valeur possible de l'expression* $\cos(x) + \sin(x)$ *?*

***Exercice 109.** *Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carré sans couvercle, dont la contenance est d'un litre, pour que sa construction demande un minimum de matériau ?*

Exercice 110.

Nous construisons une boîte parallélipipédique sans couvercle à partir d'un carton carré de 60cm de côté. Nous avons coupé dans chaque coin un carré de côté x *afin de pouvoir relever les bords.*

Quelle doit être cette mesure x *pour que le volume de la boîte soit maximal ?*



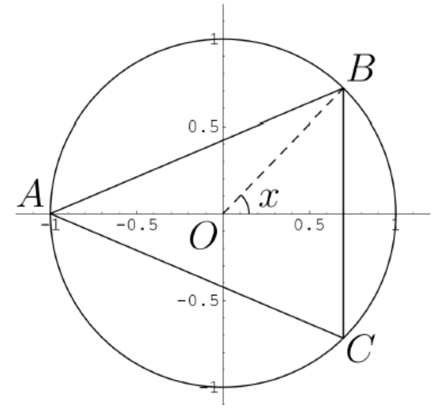
Exercice 111. *Trouvez deux nombres positifs dont la somme vaut 10, de façon que le produit du carré de l'un par le cube de l'autre soit maximal.*

Exercice 112. *Quelle est la plus petite différence d'ordonnée entre les paraboles*

$$\mathcal{P}_1 : y = -x^2 + 3x - 5 \;\; \text{et} \;\; \mathcal{P}_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10 \;\; ?$$

Exercice 113.

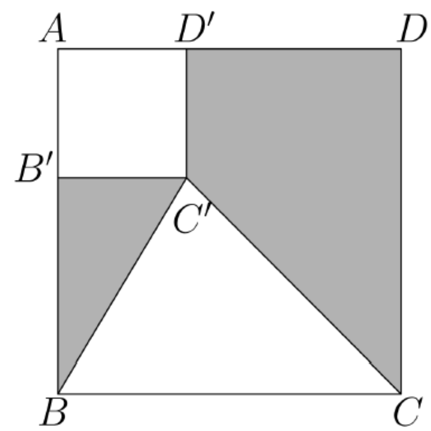
Trouvez l'aire maximale du triangle ABC dessiné ci-dessous.



Exercice 114.

La figure $ABCD$ est un carré de 8 cm de côté et $AB'C'D'$ est un carré de côté x. Soit $\sigma(x)$ l'aire de la partie grisée.

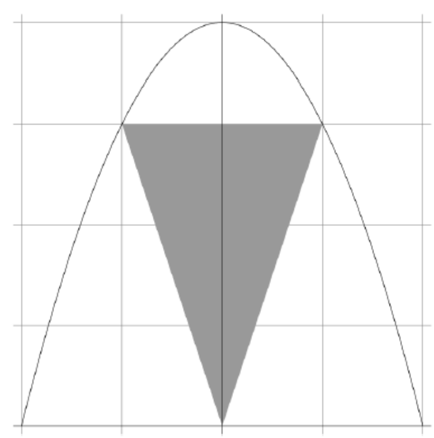
Donnez l'expression fonctionnelle de $\sigma(x)$, puis déterminez x pour que l'aire grisée soit maximale. Que vaut cette aire maximale ?



Exercice 115.

Considérons les triangles ayant un sommet à l'origine et un côté horizontal dont les extrémités se trouvent sur la partie positive de la parabole $y = 4 - x^2$.

Trouvez la hauteur du triangle dont l'aire est maximale et indiquer cette aire maximale.

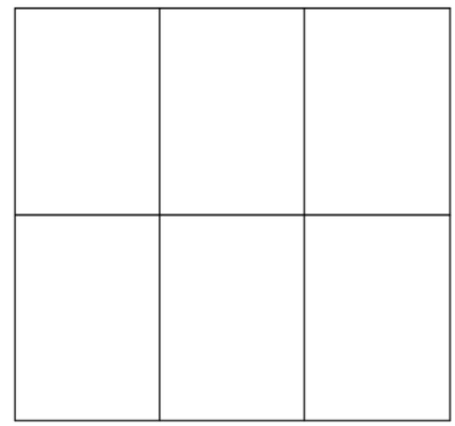


Exercice 116. *Nous disposons de barrières d'une longueur totale de $100m$ pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?*

***Exercice 117.**

Nous disposons de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-dessous.

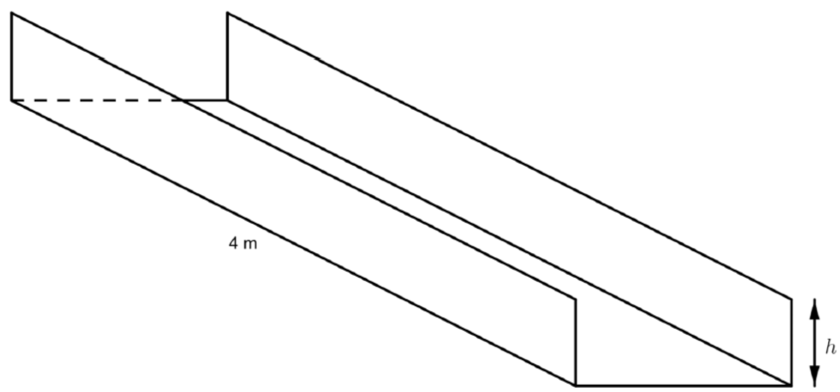
Quelles dimensions faut-il donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?



***Exercice 118.**

Une plaque de métal rectangulaire longue de 4m et large de 40cm est pliée de manière à créer une gouttière en forme de parallélépipède rectangle.

Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière pour qu'elle ait un volume maximal ?



***Exercice 119.** *Quelles sont les dimensions d'une boîte de conserve cylindrique contenant 1 litre et utilisant le moins de fer-blanc possible ?*

***Exercice 120.** *Un réservoir cylindrique a un volume de 64 cm^3. Trouvez son rayon pour que l'aire de sa surface totale soit minimale lorsque le réservoir est*

a) ouvert ;

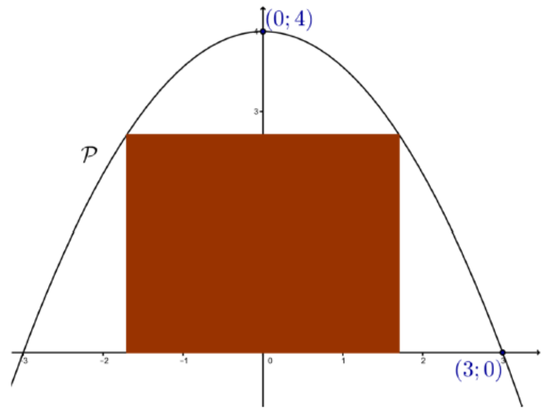
b) fermé.

Exercice 121. *Une société fabrique des canettes cylindriques destinées à contenir différentes boissons d'une quantité de 500 ml. Le couvercle revient à 5 centimes par centimètre carré et le métal restant à 3 centimes par centimètre carré. Déterminez les dimensions de la canette qui rendent le coût de fabrication minimal.*

Exercice 122.

Soit la parabole $\mathcal{P}$ de sommet $(0;4)$ et passant par le point $(3;0)$. Le rectangle ci-dessous a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?



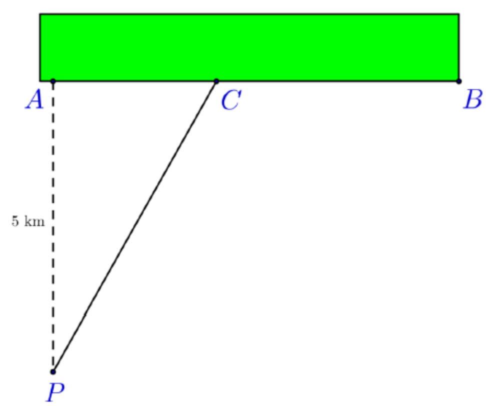
Exercice 123. *Considèrons une famille de droites de pentes négatives passant toutes par le point $(3;2)$. Pour quelle droite de cette famille, le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ?*

* **Exercice 124.** *L'intérieur d'un réservoir sans couvercle, dont le fond a la forme d'un carré, doit être recouvert d'un produit imperméable. La capacité du réservoir est de 32 litres. Déterminez les dimensions du réservoir qui rendent minimale la quantité de produit à utiliser.*

Exercice 125.

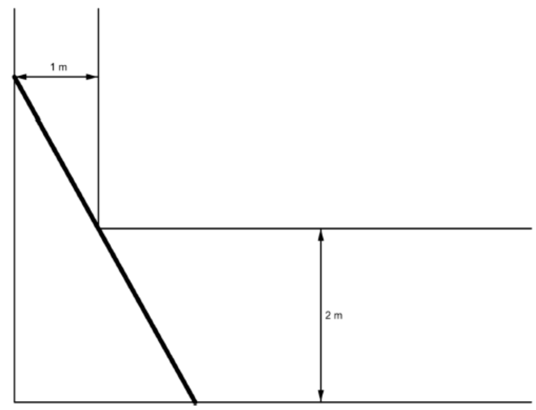
Un homme se trouvant dans une barque au point P situé à 5 km du point A le plus proche du rivage souhaite atteindre B, à 6 km de A, le long du rivage, et ceci le plus rapidement.

A quel endroit devra-t-il accoster s'il rame à 2 km/h et marche à 5 km/h ?



Exercice 126.

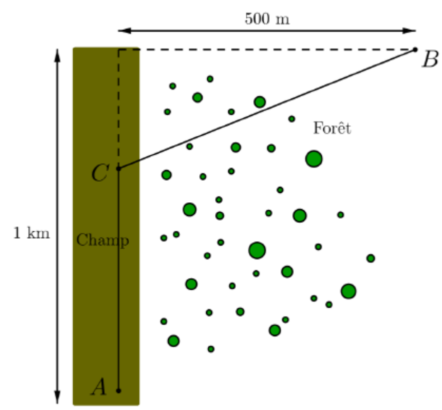
Deux couloirs de respectivement un et deux mètres de largeur, se rencontrent à angle droit. Une barre rigide est transportée parallèlement au sol.



Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si nous voulons pouvoir la transporter d'un couloir à l'autre ?

*Exercice 127.

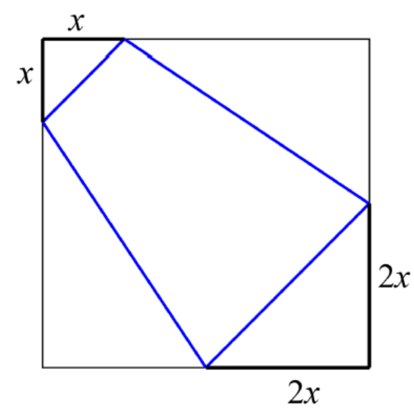
Nous construisons un chemin conduisant d'une maison A, située en lisière de forêt, à une cabane de bûcherons B à l'intérieur d'une forêt, comme l'indique la figure ci-dessous. En lisière de forêt, le mètre courant de chemin revient à 300 francs alors qu'en forêt un mètre coûte 500 francs.



Déterminez en quel point C il s'agit de bifurquer dans la forêt pour obtenir un tracé aux moindres coûts.

Exercice 128.

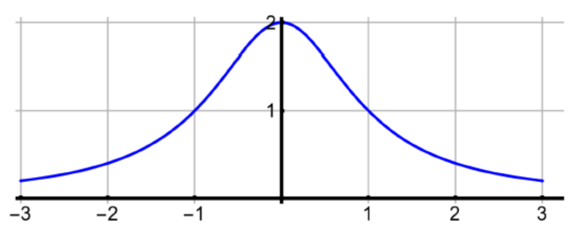
Trouvez l'aire maximale d'un trapèze inscrit comme ci-contre dans un carré dont les côtés mesurent 12cm.



*Exercice 129.** *Soit la fonction* $f(x) = \sin(2x)$ *avec* $x \in [0; \pi]$.

Trouvez les points du graphe de f *en lesquels la pente de la tangente au graphe est maximale, ainsi que les points où la pente est minimale. Calculez la valeur de ces pentes puis esquissez le graphe de la fonction.*

Exercice 130. *Le graphe de la fonction* $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ *est représenté ci-dessous.*



Trouvez les points du graphe à distance minimale de l'origine et calculez cette distance.

Exercice 131. *Dessinez, dans un même système d'axe, les fonctions définies par* $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = \ln(x)$ *puis calculez la plus petite distance verticale séparant les deux graphes.*