Exercice 6.1

Indiquer le domaine de définition D ainsi que l'image du domaine $f(D)$ (domaine d'arrivée) de :

a. $y = x^2 + 1$

b. $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

c. $y = \dfrac{\tan(x)}{x}$

d. $y = 1 + \sqrt{2x - 5}$

e. $y = -\dfrac{1}{x}$

f. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$

g. $y = |\cos(x)|$

h. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - 6x}}$

i. $y = \dfrac{1}{\tan(x)}$

Exercice 6.2

Etudier la parité des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = |2x - 5|$

b. $f_5(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4 + 5}$

c. $f_3(x) = 3x \cdot \sin(2x)$

d. $f_4(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x}$

e. $f_2(x) = x^3 \cdot \cos(x)$

f. $f_6(x) = \dfrac{\sin(5x) \cdot \cos(x)}{x^2}$

Exercice 6.3

Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes :

a. $y = 2x + 1$

b. $y = -x^2 + 7x - 6$

c. $y = 2\cos(x) + 1$

d. $y = x^2 - 3x + 4$

e. $y = \sqrt{x + 3} - 2$

f. $y = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

Exercice 6.4

A l'aide d'un tableau des signes, résoudre l'inéquation suivante :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} > 0$$

Exercice 6.5

Déterminer, si elles existent, les périodes des fonctions suivantes :

a. $y = 5\sin(4x)$

b. $y = -2\tan(3x)$

c. $y = \sin(4x) + \tan(3x)$

d. $y = \cos(5x)$

e. $y = x \cdot \sin(x)$

f. $y = \sin^2(x) + 2$

Exercice 6.6

Démontrer les propositions suivantes :

a. Le produit de deux fonctions paires donne une fonction paire

b. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire donne une fonction impaire.

c. Le produit de deux fonctions impaires donne une fonction paire.

Vérifier les résultats avec les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$

Exercice 6.7

Etudier la fonction$f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$, c'est-à-dire :

a. Domaine de définition et d'arrivée.

b. Intersection(s) avec les axes de coordonnées.

c. Tableau des signes

d. Quel est le comportement de la fonction lorsque x est proche de l'exclu ?

e. Quel est le comportement de la fonction lorsque x devient très grand ou très petit ?

f. En faire une représentation graphique.

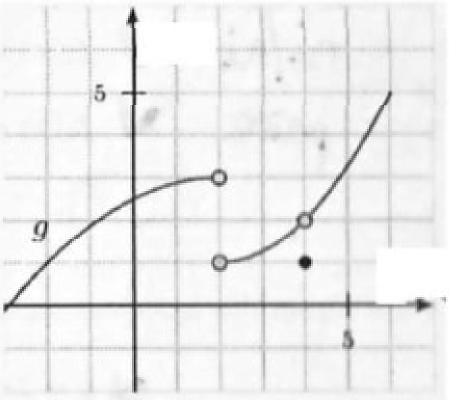
Exercice 6.8

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes en s'aidant du graphe de $g(x)$:

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) =$

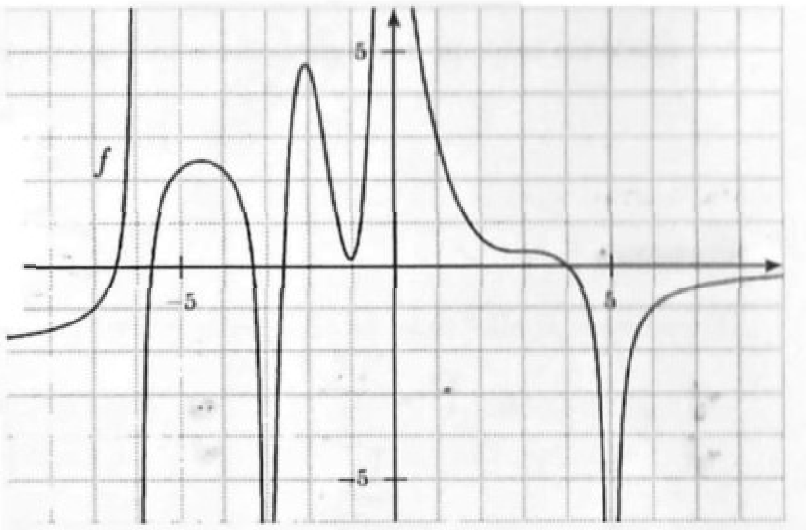
$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 4} g(x) =$



Quelle est la valeur de $g(2)$ et $g(4)$?
La fonction g est-elle continue ?

Exercice 6.9



En utilisant le graphe de $f(x)$, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ $\qquad$ c. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$

b. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$ $\qquad$ d. $\lim\limits_{x \to -6} f(x) =$

Quel est le domaine de cette fonction ?Trouver les équations des **asymptotes verticales et horizontales.**

Exercice 6.10

Dessiner **une** fonction h telle que :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 3$

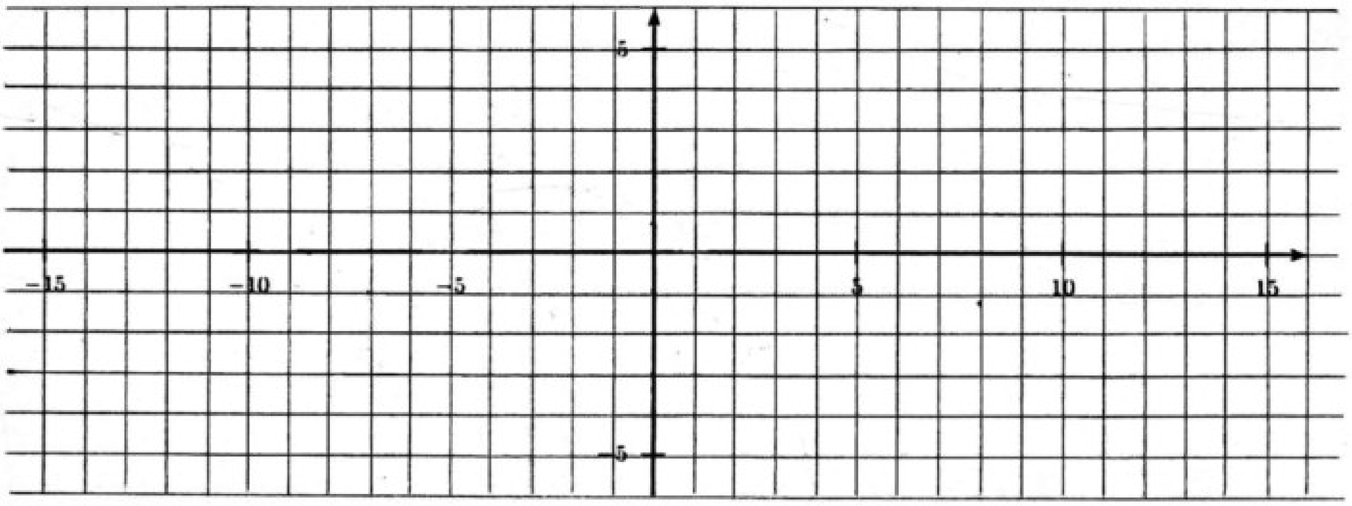
b. $\lim\limits_{x \to -7} h(x) = -\infty$

c. $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = -\infty$

d. $\lim\limits_{x \to 4^+} h(x) = +\infty$

e. $h(-2) = 1$

Quel est le domaine de **votre** fonction h ?



Exercice 6.11

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to 2} 5x =$

b. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) =$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+2}{x-2} =$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+4} =$

e. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} =$

f. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} =$

g. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} =$

h. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} =$

i. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x} =$

Exercice 6.12

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to\infty} (-4x^2) =$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3+2 =$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} =$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} =$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-2}{5x+7} =$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^2+1} =$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x}{x} =$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x} =$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2+6x)(5x-2)}{-10x^3+13x-7} =$

Exercice 6.13

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+x-6}$. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

c. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

d. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

e. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

f. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

g. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$

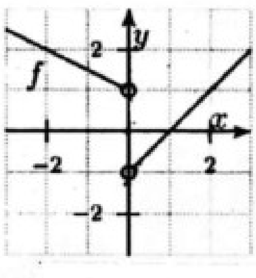
h. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$

i. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$

Que vaut $f(2)$, $f(1)$ et $f(-3)$?

Exercice 6.14

Voici le graphe de la fonction $f(x)$. Si possible calculer :



a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

d. $f(2) =$

e. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$

f. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

g. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

h. $f(0) =$

La fonction f est-elle continue ? Pourquoi ?

Exercice 6.15

a. Déterminer les asymptotes **verticales** des fonctions :

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ b) $y = \dfrac{2 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$

b. Déterminer **toutes les asymptotes** des fonctions suivantes :

a) $y = \dfrac{2x - 5}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 2}{-x^2 + 4}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 5}$

d) $y = \dfrac{-2x^3 + 9x^2 - 13x + 7}{x^2 - 4x + 4}$

Exercice 6.16

Etudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = \frac{52{,}5x - 27{,}5x^2 - 5x^3}{-7 + 6x + x^2}$ b. $f_2(x) = \frac{-30 + 9x + 3x^2}{-24 + 4x + 4x^2}$ c. $f_3(x) = \frac{2x^3 + 11x^2 - 100x + 165}{x^2 - 4x + 3}$

Exercice 6.17

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier leur comportement au voisinage des valeurs où elles ne sont pas définies.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{2x - 6}$ b. $g(x) = \frac{4x - 3}{x^2 - 4}$ c. $h(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$

Exercice 6.18

Etudier la fonction $f(x) = \frac{-2x^3 - 6x^2 + 20x}{5x^2 - 15x + 10}$.

Exercice 6.19

a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)$

b. Déterminer numériquement la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

c. A l'aide d'une réflexion géométrique, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

d. En tirer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

Exercice 6.20

Calculer si elles existent les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} =$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x} =$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} =$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(5x)}{2x} =$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} =$

g. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} =$

h. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

i. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

Exercice 6.21

Calculer si elles existent les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0} |x| =$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$

c. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} =$

e. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{|x^2-4|} =$

f. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} =$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} =$

h. $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} =$

i. $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-1} =$

Exercice 6.22

Calculer si elles existent les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} =$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{2x} =$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\tan(x)} =$

d. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-2} =$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)} =$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{\sqrt{x^2+4}-2} =$

g. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-2x+4}+2x =$

h. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-2x+4}+x =$

i. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x} =$

j. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4} =$

k. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)} =$

l. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} =$

Exercice 6.23

Déterminer le domaine et les asymptotes des fonctions :

a. $f_1(x) = \sqrt{4x^2-5}$

b. $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

c. $f_3(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

d. $f_4(x) = 5x-\sqrt{4x^2+2x}$

Exercice 6.24

Déterminer les expressions fonctionnelles des fonction $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de fonctions rationnelles (sous forme factorisées) telle que

a. $f_1(x)$ admet une asymptote verticale en $x =$ une asymptote oblique d'équation $y = -x+5$. De plus, la courbe est en dessus de l'asymptote lorsque x est proche de ∞

b. $f_2(x)$ admet une asymptote verticale en $x = 2$, un trou en $(3; 11)$.

Exercice 6.25

On donne la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x & x<3 \\ mx+h & 3\le x\le 5 \\ -x & x>5 \end{cases}$. Sachant que $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dessiner son graphe puis trouver les valeurs de m et h.

Exercice 6.26

Quelles valeurs faut-il donner à a et à b pour que les fonctions suivantes soient continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & x<0 \\ a & x=0 \\ \frac{2x-1}{b} & x>0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+ax+6 & x<1 \\ 5x+b & 1\le x\le 2 \\ \frac{x^2+5x-14}{x-2} & 2<x \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0.5^x-6 & x<-3 \\ \sqrt{x-a} & -3\le x\le 9 \\ \frac{-\sqrt{x^2+19}}{b} & 9<x \end{cases}$$

Exercice 6.27

a. Dessiner la parabole $y = f(x) = x^2$. (premier quadrant uniquement, une unité = 10 carreaux)

b. On considère sur la parabole le point fixe $P(1;1)$ et le point courant $Q(1+\Delta x; y)$. Calculer la pente de la sécante PQ pour $\Delta x = 0.5; 0.4; 0.3; 0.2; 0.1$ et 0.01. Dessiner une de ces sécantes. Rappel : la pente est donnée par le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

c. Vers quel nombre tend le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$quand $\Delta x \to 0$? Prouver le résultat et interpréter géométriquement ce nombre.

d. Calculer $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en un point $P_0(x_0; y_0)$de la parabole.

Exercice 6.28

A l'aide de la définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a. $y = 2x + 5$

b. $y = mx + h$

c. $y = h$ (constante)

d. $y = 3x^2 - 4x + 7$

e. $y = ax^2 + bx + c$

f. $y = x^3$

g. $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

h. $y = \frac{1}{x}$

i. $y = \frac{1}{2x+1}$

j. $y = \sqrt{x}$

k. $y = \cos(x)$

l. $y = \sin(x)$

Exercice 6.29

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a. Représenter le graphe de cette fonction et préciser l'ensemble des images.

b. Discuter la continuité de cette fonction pour $x = 0$

c. Discuter la dérivabilité de cette fonction en $x = 0$

Exercice 6.30

Dériver les fonctions suivantes à l'aide de la dérivée du produit, puis vérifier en effectuant la distributivité d'abord :

a. $f(x) = (x+1)(x-1)$

b. $g(x) = (x^3 + 4)(x^2 + 3)$

c. $h(x) = x^m x^n$

Exercice 6.31

A l'aide des règles de dérivation, établir les dérivées de :

a. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 89$

b. $f(x) = -5x^4 + \cos(60°)x^2 - \tan(45°)$

c. $f(x) = (7 - 5x)^2$

d. $f(x) = 3\sqrt{x} + 8x^2 - 9x$

e. $f(x) = \frac{7}{2x} + 3\sin(x)$

f. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

Exercice 6.32

Déterminer les coordonnées des deux points de la courbe $y = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$ en lesquels la tangente a une pente égale à 13.

Exercice 6.33

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en un point donné

a. $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ en $x = -2$

b. $g(x) = \frac{-3}{x}$ en $x = 5$

c. $h(x) = 5\sqrt{x} + 2$ en $x = 4$

d. $i(x) = \cos(x)$ en $x = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 6.34

En un point de la courbe $y = x^2 + k$, l'équation de la tangente est $y = 6x - 7$. Déterminer la valeur de k, ainsi que les coordonnées du point.

Exercice 6.35

Dériver :

a. $y = \frac{x}{x-1}$

b. $y = \frac{x}{1+5x}$

c. $y = \frac{x^2}{3x-2}$

d. $y = \frac{x}{1+x^3}$

e. $y = \frac{\sin(x)}{x}$

f. $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

g. $y = \frac{\sqrt{x-5}}{x}$

h. $y = x\cos(x)$

i. $y = (4 - x^2)\sin(x)$

j. $y = \tan(x)$

k. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

l. $y = x^{\frac{1}{3}} \cdot (7 - x^3)$

m. $y = \frac{x^2-7x+9}{x}$

n. $y = x^3(\sin(x) + 1)$

o. $y = \sin(x) \cdot \cos(x)$

Exercice 6.36

Déterminer l'équation de la tangente à $y = \frac{x^2+3}{x+3}$ en $x = 1$.

Exercice 6.37

Déterminer la pente de la tangente à $y = \frac{\sin x}{x^2}$ en $x = \pi$ (réponse en multiples de π).

Exercice 6.38

Pour quelle valeur de a la fonction $f(x) = \frac{2x+a}{x-1}$ est-t-elle tangente à la droite $y = -7x + 23$? Trouver le point de contact.

Exercice 6.39

Dériver les fonctions composées suivantes :

a. $y = (x^5 + 1)^4$

b. $y = (\sqrt{x} - 1)^5$

c. $y = (6x^3 - 5)^{-2}$

d. $y = (2x^3 - 1)^8$

e. $y = \sqrt{4x + 3}$

f. $y = \sin\left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right]$

Exercice 6.40

Déterminer les équations des tangentes et des normales …

a. à la courbe $y = x\sin(x)$ en $x = \pi$

b. à la courbe $y = x\sqrt{3x + 1}$ en $x = 5$

Exercice 6.41

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer

a. $f'(2)$

b. x tel que $f'(x) = 0$

Exercice 6.42

Soit la fonction $y = \sqrt[4]{x^3+8}$. Déterminer la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en $x = 2$.

Exercice 6.43

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = (x^2-5)^3$ au point d'abscisse 2.

Exercice 6.44

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ au point d'ordonnée 1.

Exercice 6.45

Dériver les fonctions suivantes

a. $f(x) = (3x+1)^3$

b. $f(x) = \cos(2x)$

c. $f(x) = \sqrt{8x^2-2x+3}$

d. $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x+3}$

e. $f(x) = (7x^3-2x)^4$

f. $f(x) = \cos^3(x)$

g. $f(x) = \frac{x}{(2x+5)^2}$

h. $f(x) = \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$

i. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

j. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

l. $f(x) = \sqrt[3]{\tan(x)}$

m. $f(x) = \frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

n. $f(x) = \arcsin(x)$

o. $f(x) = \arccos(x)$

p. $f(x) = \arctan(x)$

q. $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$

r. $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$

s. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

t. $f(x) = x \cdot \arcsin(x)$

u. $f(x) = \sqrt{\arctan(x)}$

v. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

Challenge : Dériver la fonction suivante $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)^3$

Exercice 6.46

Déterminer les extrema des fonctions suivantes et indiquer de quel type ils sont.

a. $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 7$

b. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

c. $y = 3x^5 - 20x^3 + 1$

d. $y = x^2 + \frac{54}{x}$

e. $y = x - \sqrt{x}$

f. $y = x^{\frac{1}{3}}(4-x)$

Exercice 6.47

Déterminer les zéros des expressions suivantes :

a. $-2x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{7}{4}} + x^{\frac{11}{4}}$

b. $-1.8\sqrt{x} + 3x^{\frac{3}{2}}$

c. $-\frac{0.2}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

d. $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{8}{3}}$

Exercice 6.48

Etablir le tableau des variations des fonctions :

a. $y = x^2 - 5x + 6$

b. $y = x^3 - 12x$

c. $y = x^{\frac{3}{2}}(x-1)$

d. $y = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{7}{4}}$

e. $y = x + \frac{3}{x}$

f. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 6.49

Déterminer le tableau de variation de $f(x) = \frac{(x-6)(x+2)(x-1)}{12}$. Esquisser cette courbe. Quelles sont les valeurs extrêmes des pentes des tangentes ? En quel(s) point(s) ?

Exercice 6.50

Etudier les fonctions :

a. $f(x) = x^3 - 3x$

b. $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$

c. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

d. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}$

e. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

f. $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}$

g. $f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}$

h. $f(x) = \frac{1-\left|1-x^2\right|}{1-x}$

i. $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

j. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2} \cdot |x-2|$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

l. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$

Exercice 6.51

Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble des images des fonctions suivantes :

a. $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\right)$

b. $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 6.52

Etudier les deux fonctions ci-dessous. La deuxième dérivée n'est pas demandé.

a. $f(x) = \arcsin\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$

b. $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

c. $f(x) = -3 + \sqrt{-x^2+8x+9}$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

e. $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3} - x$

Exercice 6.53

a. Etudier, sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$: $f(x) = 3\sin(x) + 4\cos(x)$ et $g(x) = \frac{1}{\cos(2x)}$

b. Etudier la fonction $h(x) = x - \sin(x)$

c. Etudier la fonction $i(x) = \sin(\pi \cdot x) - \sin^2(\pi \cdot x)$

d. Etudier la fonction $j(x) = x \cdot \sin(x)$

Exercice 6.54

Pour rappel,

le graphe de f admet un **point anguleux** en $(a, f(a))$ si f est continue en a et si

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) \neq \lim_{x\to a^-} f'(x)$$

le graphe de f admet une **tangente verticale** en $(a, f(a))$ si f est continue en a et si

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$$

le graphe de f admet un **point de rebroussement** en $(a, f(a))$ si f est continue en a et si

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty \text{ ou}$$
$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to a^+} f'(x) = -\infty$$

Déterminer si le graphe de f admet une tangente verticale, un point de rebroussement ou un point anguleux en $(0, 0)$

a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

c. $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

d. $f(x) = 7 \cdot \sqrt[4]{x^2}$

e. $f(x) = |x^2 + 4x|$

f. $f(x) = |\sin(x)|$

Exercice 6.55

Etudier la fonction suivante : $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}$. La deuxième dérivée n'est pas demandé.

Exercice 6.56

Représenter le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$ après avoir trouvé les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité et de convexité, ainsi que les zéros de cette fonction.

Exercice 6.57

On envisage la fonction $y = ax^4 + bx^3$, où a et b sont des nombres réels. Sachant que $P\left(\frac{9}{2}; \frac{81}{16}\right)$ est un point d'inflexion du graphe de f, trouver les valeurs de a et b et étudier la fonction.

Exercice 6.58

a. Montrer que le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$ ne possède aucun point à tangente horizontale.

b. Etablir l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 3.

c. Représenter finalement le graphe de f et la tangente.

Exercice 6.59

a. Soit la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les variables a et b de sorte que le point $T(1, 1)$ soit un point à tangente horizontale. Déterminer son type.

b. Sachant que $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$, $a, b \in \mathbb{R}$ a la tangente $t : y = -2.5x + 4$ au point d'abscisse $x = -1$, trouver les valeurs de a et b.

Exercice 6.60

a. Déterminer les équations des tangentes à $y = 3(x-1)^2 + 5$ qui passe par l'origine

b. Déterminer l'équation de la tangente à $f(x) = x^2 - 15x - 9$ qui passe par $(-4; 3)$

Exercice 6.61

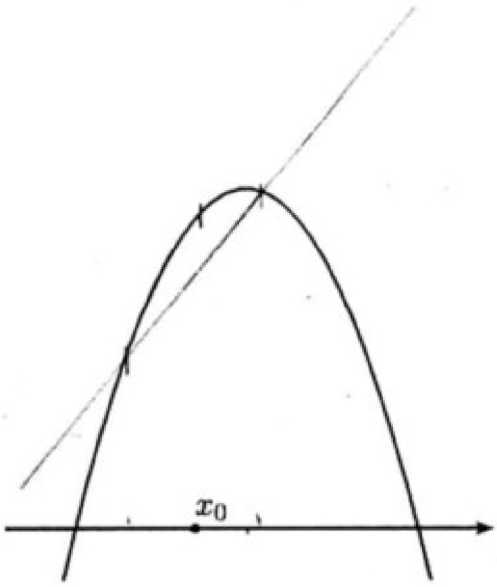
Déterminer l'équation de la tangente à $y = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 6.62

a. Dessiner précisément, la tangente à la parabole ci-contre en $x = x_0$ puis sur le même graphe la sécante passant par les points $x_0 - h$ et $x_0 + h$. Choisir h aléatoirement.

b. Montrer que pour toutes les valeurs de h et x_0, la tangente à une parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ en en point x_0 a la même pente que la sécante passant par les points d'abscisses $x_0 + h$ et $x_0 - h$

c. Pour quelle valeur de h ce même résultat est-il valable pour la fonction cubique $y = x^3$?



Exercice 6.63

Soit la fonction définie par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x \leq 2 \\ \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 4x} & , x > 2 \end{cases}$$

Définir les valeurs de a et b de sorte que f soit continue et partout dérivable. Etablir l'équation de la tangente qui passe par $(-4; 3)$

Exercice 6.64

Montrer que $f(x) = \frac{3x(x-a)}{x^2+9}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ possède toujours deux points à tangente horizontale.

Exercice 6.65

Déterminer les coefficients a, b et c de telle manière que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par le point $(5; 8)$et admette au point $(2; 2)$ une tangente de pente -4

Exercice 6.66

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'angle de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe $O_x$en chaque point d'intersection.

a. $y = x^2 - 1$ b. $y = x^4 - 5x^2 + 4$ c. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ d. $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

Exercice 6.67

Déterminer l'angle des courbes ci-dessous en leur point d'intersection

$y = x^2$ et $y = \frac{x^2}{4} + 3$ $y = \sin(x)$ et $y = \cos(x)$ c. $y = x^3 - 4x$ et $y = x^3 - 2x^2$

Exercice 6.68

Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel a pour que les graphes des fonctions f et g ci-dessous se coupent à angle droit ?

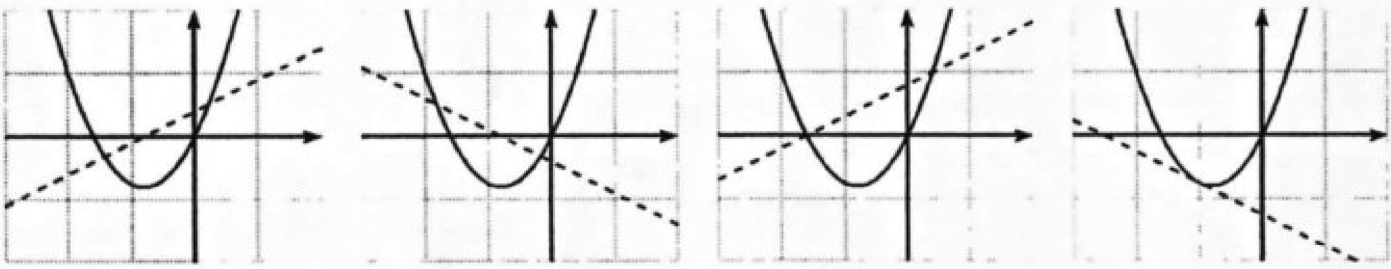
a. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2} - ax^2$

b. $f(x) = ax^2$ et $g(x) = \frac{1-x^2}{a}$

c. $f(x) = 2x^2 - a$ et $g(x) = \frac{x^2}{a}$

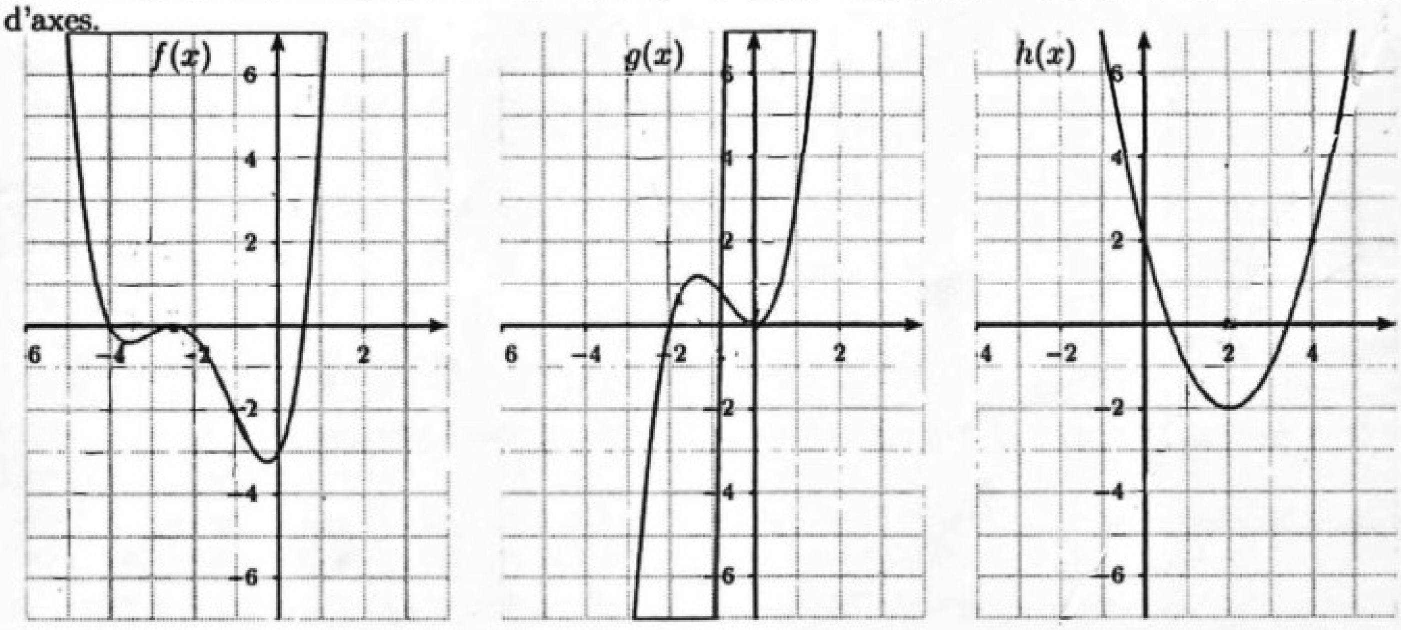
Exercice 6.69

Quelle illustration contient le graphe d'une fonction et de sa dérivée ? Justifier.



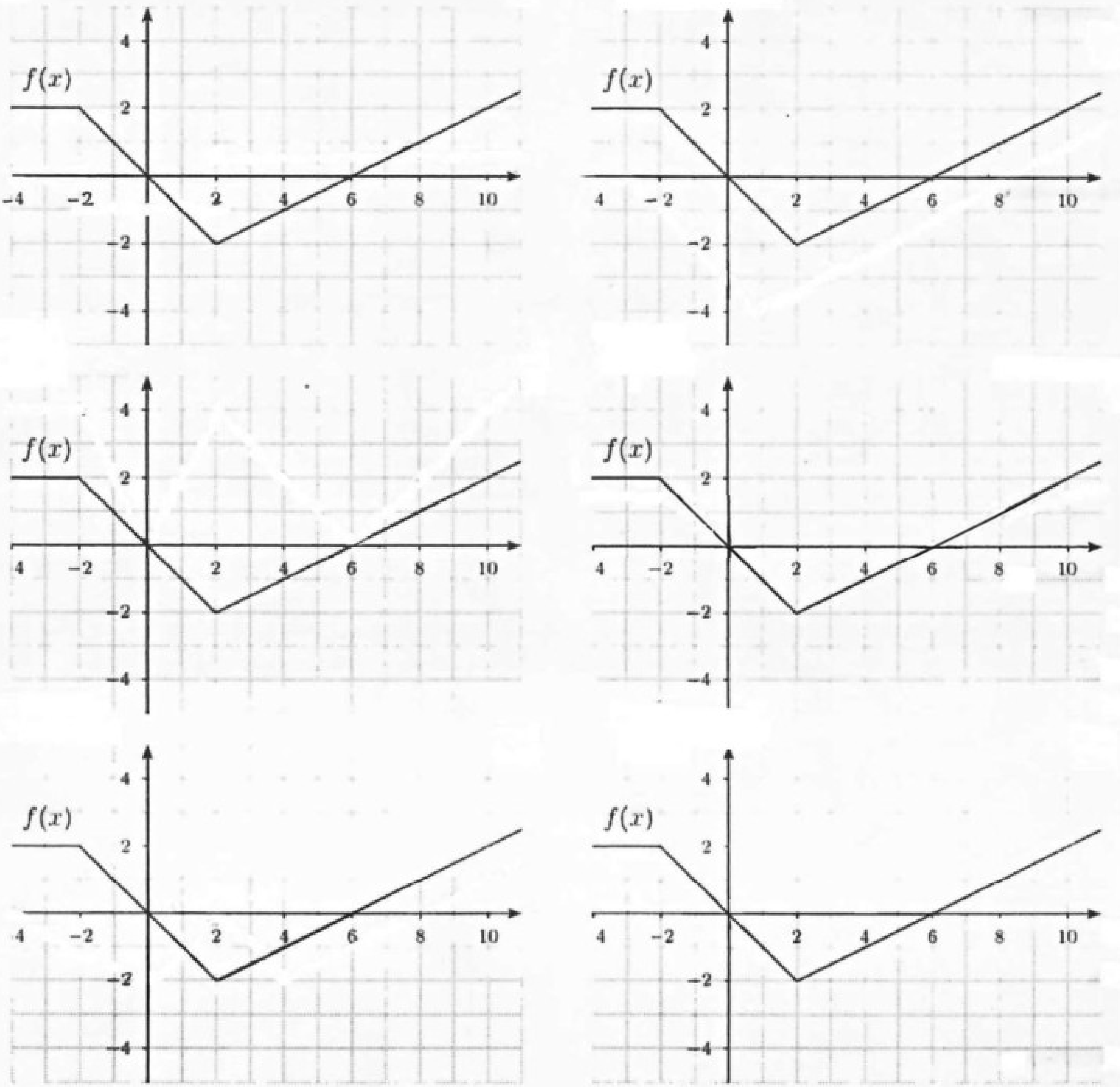
Exercice 6.70

Tracer soigneusement le graphe des fonctions $y = f'(x)$, $y = g'(x)$ et $y = h'(x)$ sur les mêmes systèmes d'axes.



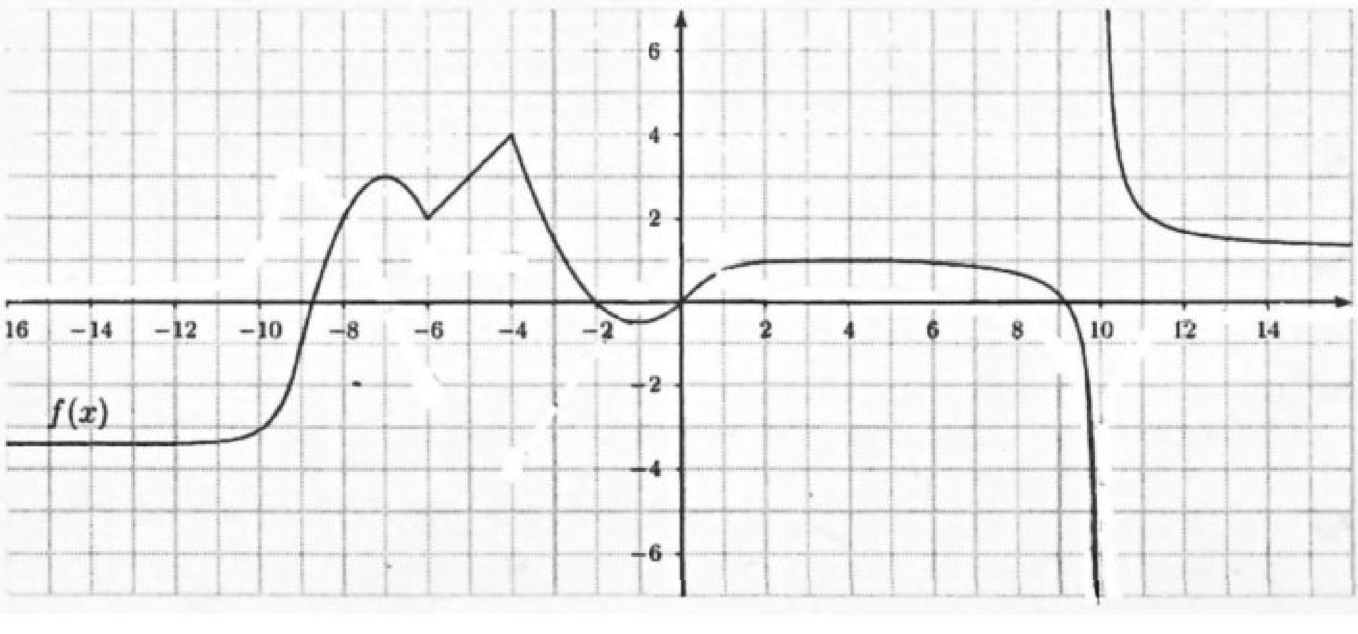
Exercice 6.71

Tracer soigneusement le graphe la fonction $y = f'(x)$ sur le même système d'axes. Dessiner également les graphes de $f(x+1) - 2$, $2\,|f(x)|$, $\sqrt{f(x)}$, $f\,|x-2|$ et $f''(x-2)$.



Exercice 6.72

Tracer soigneusement le graphe de la fonction $y = f'(x)$ sur le même système d'axes.



Exercice 6.73

Déterminer deux nombres x et y positifs tels que leur somme soit égale à 10 et le produit x^3y^2 soit maximal.

Exercice 6.74

Une boîte cylindrique contient 500ml. Que doivent mesurer sa hauteur et son rayon pour que la mesure de sa surface totale soit minimale.

Exercice 6.75

Une boite (parallélépipède sans couvercle) est construite à partir d'un carré de 10cm de côté. Quatre carrés identiques sont découpés à chacun de ses sommets, puis le développement est plié et collé. Que doit mesurer le côté des carrés enlevés pour que le volume de la boîte soit maximal ?

Exercice 6.76

Un enclos rectangulaire est attenant à un mur. Il n'est donc clôturé que le long de trois de ses côtés.

a. Quelle est l'aire maximale de cet enclos si la longueur totale de la clôture est 200m ?

b. Quelle est la longueur minimale de sa clôture si la superficie est de $300m^2$?

Exercice 6.77

Une plaque de métal mesure 50 cm de long et 40 cm de large. On découpe à chacun de ses coins un carré de côté x cm. On la plie ensuite afin de former un plateau de profondeur x.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b. Trouver la valeur de x qui maximise la capacité du plateau.

Exercice 6.78

A partir d'un anneau de ficelle de longueur 1 m on forme un rectangle avec une paire de côtés opposés de longueur x cm. Trouver la valeur de x qui maximise la surface enfermée par la ficelle.

Exercice 6.79

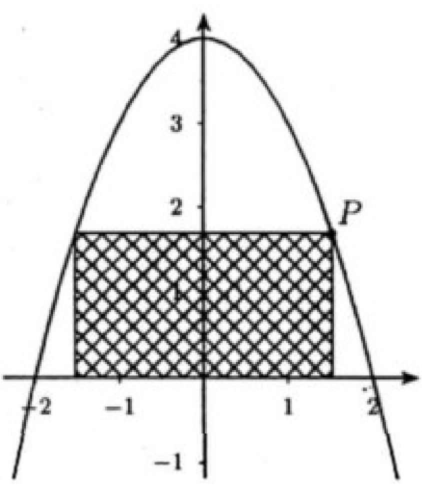
On considère la parabole $y = -x^2 + 4$ ainsi qu'un de ses points $P(x\,;\,y)$ situé dans le premier quadrant. On dessine ensuite sous cette dernière un rectangle dont P est l'un de ses sommets et ayant deux sommets sur l'axe des x.

a. Déterminer la valeur de x de sorte que l'aire de ce rectangle soit maximale. Que vaut cette aire ?

b. On fait tourner le rectangle autour de Oy. Calculer le volume de cylindre ainsi obtenu, puis trouver les dimensions du cylindre de volume maximal. Que vaut ce volume ?

c. On fait tourner le rectangle autour de Ox. Calculer le volume de cylindre ainsi obtenu, puis trouver les dimensions du cylindre de volume maximal. Que vaut ce volume ?

d. On fait tourner le rectangle autour de la droite $x = 3$. Calculer le volume de cylindre ainsi obtenu, puis trouver les dimensions du cylindre de volume maximal. Que vaut ce volume ?



Exercice 6.80

Trouver les points sur le graphe de $f(x) = \frac{4}{x}$ les plus proches de l'origine.

Exercice 6.81

On considère une parabole $f(x) = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de la parabole situé dans le premier quadrant. La tangente à la parabole en M coupe l'axe O_x en A et l'axe O_y en B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

Exercice 6.82

Trouver le point $P(x, y) \in y = -x^2$ le plus proche de la droite $d : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$

Exercice 6.83

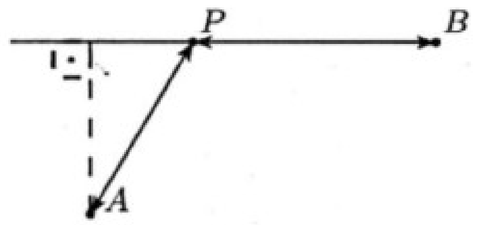
Soit la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

a. Représenter la fonction f

b. Déterminer le point du graphe de f d'abscisse positive dont la distance à l'asymptote est maximale. Que vaut cette distance ?

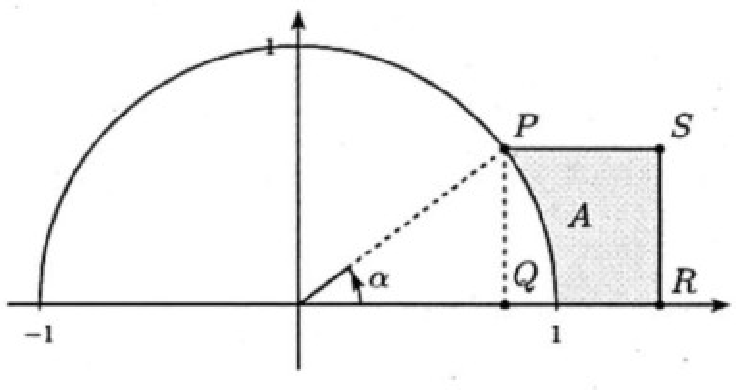
Exercice 6.84

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



Exercice 6.85

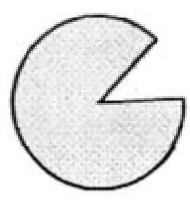
Le polygone $PQRS$ ci-contre est un carré. Pour quelle valeur de α l'aire A est-elle maximale ? Trouvez la longueur d'un côté du carré $PQRS$ quand l'aire A est maximale.



Exercice 6.86

On fabrique un cornet de forme conique en rejoignant les bords rectilignes d'un secteur circulaire de rayon r. Quel est le volume du plus grand cornet possible ?

Indication : Choisir la hauteur du cône comme variable.

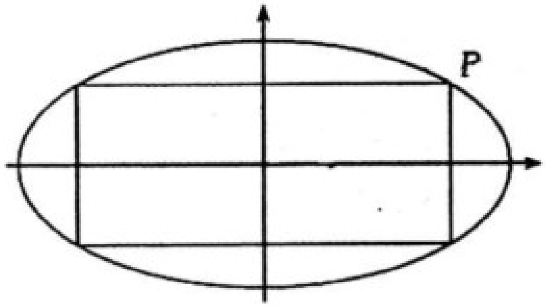


Exercice 6.87

Soit l'ellipse d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

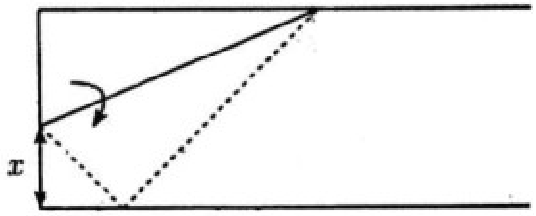
a. Vérifier que $P(a\cos(\alpha); b\sin(\alpha))$ est un point de l'ellipse.

b. P est un sommet du rectangle inscrit dans l'ellipse, deux des cotés étant parallèles à Ox. Déterminer les dimensions et l'aire du rectangle en fonction de α. Pour quelle valeur de α cette aire est-elle maximale ?



Exercice 6.88

On plie une bande de papier de largeur 1 en ramenant un coin sur le bord opposé comme illustré ci-contre.



a. Montrer que la longueur l du pli vaut

$$l(x) = \sqrt{\frac{2(1-x)^3}{1-2x}}$$

b. Montrer que cette longueur est minimale pour $x = 0.25$.

Exercice 6.89

Utiliser la relation $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ entre exponentielles et logarithmes pour prouver les propriétés suivantes des logarithmes (valables pour toute base $a > 0$) :

a. $\log_a 1 = 0$

b. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

c. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

d. $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$

e. $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$

f. Montrer que $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Exercice 6.90

Transformer les expressions suivantes

a. $\ln\left(\left(a^5\sqrt[3]{b}\right)/c\right)$

b. $\ln(x+1) - \ln(x-1)$

c. $2\ln a - \frac{1}{2}\ln b + 3\ln c$

d. $\ln\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{b}}$

e. $\log(2,23 \cdot 10^{23})$

f. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

Exercice 6.91

Résoudre les équations suivantes :

a. $\log x = \frac{1}{3}$

b. $\log x = \frac{4}{3}$

c. $\log x = \frac{-3}{4}$

d. $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 96$

e. $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 96$

f. $\log(12x+40) - \log(x-4) = 2$

g. $\log(99 + \log(8 + \log(x-1))) = 2$

Exercice 6.92

Déterminer le nombre de chiffres et les 4 premiers chiffres des nombres naturels suivants :

a. 1000^{1000} b. 1001^{999} c. 999^{1001} d. $9^{(9^9)}$

Exercice 6.93

Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes

a. $f(x) = \ln(x+3)$

b. $f(x) = \ln(2x)$

c. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

d. $f(x) = \ln(ax)$, $a > 0$

e. $f(x) = \ln(-x)$

f. $f(x) = \ln(|x|)$

g. $f(x) = \ln(x^2)$

h. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

i. $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

j. $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$

k. $f(x) = x \cdot (\ln x - 1)$

l. $f(x) = \ln(ax+b)$, $a < 0$

m. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

n. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

o. $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$

p. $f(x) = \frac{\ln 2}{\ln x}$

q. $f(x) = \ln(\ln x)$

r. $f(x) = \ln(|\ln x|)$

s. $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$

t. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

u. $f(x) = \ln(|\cos x|)$

Exercice 6.94

a. Déterminer les équations des tangentes aux courbes données en l'abscisse indiquée.

- $y = \ln(-x)$, en $x = -\frac{1}{3}$
- $y = \ln 2x$, en $x = \frac{1}{2}$

b. Trouver les points à tangente horizontale des fonctions suivantes et préciser leur type. Esquisser la courbe.

- $y = x - \ln x$
- $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln 2x$
- $y = x^2 - \ln x^2$

c. Déterminer l'équation de la normale à la courbe $y = \ln(2x-3)$ en $x = 2$.

Exercice 6.95

a. Déterminer la dérivée de $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = e^{3-2x}$ et $i(x) = e^{\sin(2x+3)}$

b. Déterminer les équations des tangentes aux courbes données en l'abscisse indiquée.

- $y = x - e^{2x}$, en $x = 0$
- $y = e^{6-2x}$, en $x = 3$

c. Trouver tous les points à tangente horizontale de la fonction $y = 7x^2 - e^{x^2}$, et déterminer leur type.

Exercice 6.96

Déterminer l'angle entre les courbes f et g suivantes en leur point d'intersection :

a. $f(x) = e^{x+2}$ et $g(x) = e^{-x}$

b. $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 2e^{3x}$

Exercice 6.97

Etablir la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3^x \cdot x^3$

b. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

c. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$

d. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 6.98

Résoudre :

a. $3 \cdot 2^x > 5^x$

b. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$

c. $e^{2x} = 6 - e^x$

Exercice 6.99

Etudier complètement les fonctions

a. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

b. $f(x) = x \ln(x)$

c. $f(x) = \log_x(2)$

d. $f(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x))$

Exercice 6.100

Quelles valeurs doit-on donner à la constante positive a pour que l'équation $x^2 - 2x + 2\log(a) = 0$ ait exactement deux solutions réelles ? Même question pour l'équation $x^2 - 2\log(a)x + 4 = 0$

Exercice 6.101

Etudier complètement les fonctions

a. $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$

b. $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$

c. $f(x) = (2x^2 - 4) \cdot e^{-x}$

d. $f(x) = \frac{1}{x-3} \cdot e^{-x}$

Exercice 6.102

Etudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes

a. $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

b. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + ax + a}$

c. $f(x) = \frac{e^x}{x^{1000} + 2}$

d. $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

e. $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

f. $f(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 6.103

Etudier la fonction $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} - 3$ en accordant une attention toute particulière au comportement de f et f' au voisinage de 0.

Exercice 6.104

On considère la fonction $f(x) = e^{0.75x} - 3x + c$.

a. Déterminer la valeur de c de telle sorte que f passe par l'origine
b. Calculer les coordonnées du point à tangente horizontale
c. A l'aide du comportement asymptotique, tracer le graphe

Exercice 6.105

On donne la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)\,e^x$. Trouver les valeurs de a et de b sachant que le graphe de f admet un seul point à tangente horizontale, dont l'abscisse et égale à 2.

Exercice 6.106

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques. Elles sont définies ainsi :

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\coth(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

a. Etudier les fonctions $y = \sinh(x)$, $y = \cosh(x)$, $y = \tanh(x)$ et $y = \coth(x)$
b. Vérifier que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 6.107

Montrer que

$$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1} \; \forall x \in [0; \infty[.$$

Indication : Etudier la croissance de $d(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ et calculer $d(0)$

Exercice 6.108

On donne la fonction $f(x) = x - \ln(x)$

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle $[-1; 0[$. et calculer une approximation de la solution au centième par bissection.
b. Etudier la fonction f