Algèbre linéaire

Jean-Marc Ledermann 2016

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction

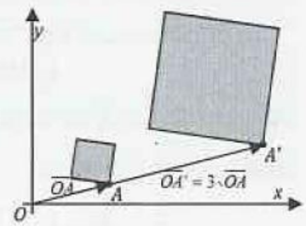
L'activité de ce cours intitulé *algèbre linéaire* est l'étude de transformations géométriques du plan et de l'espace.

Pour décrire une transformation qui *envoie* un point $P(x; y)$ du plan sur le point $P'(x'; y')$, on peut donner les coordonnées x' et y' de P' en fonction des coordonnées x et y de P.
La transformation est dite **affine** si elle peut s'écrire sous la forme

$$f : \begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + e \\ y' = c \cdot x + d \cdot y + f \end{cases}$$

avec 6 constantes a, b, c, d, e et f.

Exemples



1) **Homothétie** de centre O et de facteur 3

   Description algébrique : $f : \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$

   Description vectorielle : $f : \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP'} = 3\,\overrightarrow{OP}$

2) **Translation** de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Description algébrique : $f : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

   Description vectorielle : $f : \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{d}$

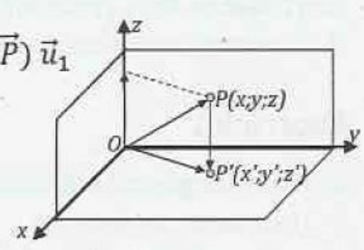
3) **Rotation** de centre $A(2; 1)$ et d'angle $\alpha = 90°$

   Description algébrique : $f : \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x - 1 \end{cases}$

4) **Projection** orthogonale sur l'axe Ox

   Description algébrique : $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$

   Description vectorielle : $f : \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP'} = (\vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{OP})\,\vec{u}_1$



5) **Projection** orthogonale sur le sol

   Description algébrique : $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$

   Description vectorielle : $f : \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - (\vec{u}_3 \cdot \overrightarrow{OP})\vec{u}_3$

C'est Euler, en 1748, qui est à l'origine du terme « transformation affine », car dit-il, « deux courbes images l'une de l'autre par une telle transformation présentent entre elles une certaine affinité ».[1]

[1] Encyclopédie Wikipédia

Étant donné une transformation affine (ou application affine ou affinité générale)

$$f:\begin{cases}x' = a\cdot x + b\cdot y + e\\ y' = c\cdot x + d\cdot y + f\end{cases}$$

déterminons l'image $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{A'B'}$ d'un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Si $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ sont deux points du plan, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 - x_1\\ y_2 - y_1\end{pmatrix}$.

Afin de trouver l'image $\vec{v}'$ du vecteur $\vec{v}$, déterminons les images A' et B' par f des points A et B.

$A'(ax_1 + by_1 + e; cx_1 + dy_1 + f)$ et $B'(ax_2 + by_2 + e; cx_2 + dy_2 + f)$ et ainsi

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix}(ax_2 + by_2 + e) - (ax_1 + by_1 + e)\\ (cx_2 + dy_2 + f) - (cx_1 + dy_1 + f)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)\\ c(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)\end{pmatrix}$$

On obtient ainsi

$$\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix}av_1 + bv_2\\ cv_1 + dv_2\end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{notation}} \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

On remarque que e et f n'apparaissent pas dans l'image d'un vecteur.

Une telle application

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \longmapsto \vec{v}' = \begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}av_1 + bv_2\\ cv_1 + dv_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

qui transforme les vecteurs du plan est appelée **application linéaire**, elle est définie par sa **matrice** $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Cette application linéaire est associée à l'application affine

$$f:\begin{cases}x' = a\cdot x + b\cdot y + e\\ y' = c\cdot x + d\cdot y + f\end{cases}$$

qui elle agit sur des points du plan.

Le sujet principal de ce cours est l'étude des **applications linéaires.**

Ces applications linéaires sont des applications dont les ensembles de départ et d'arrivée sont V_2 (ensemble des vecteurs du plan) ou V_3 (ensemble des vecteurs de l'espace), ou, plus généralement V, un **espace vectoriel** quelconque.

Exercice 1

a) Décrire géométriquement les transformations $f : \overrightarrow{OP} \longmapsto \overrightarrow{OP'}$ données algébriquement ci-dessous.

1) $f:\begin{cases}x' = y\\ y' = x\end{cases}$ 2) $f:\begin{cases}x' = x\\ y' = x\end{cases}$

b) Décrire algébriquement les transformations données ci-dessous.

1) Rotation dans le plan de 30° autour de l'origine O.
2) Rotation dans l'espace de 90° autour de l'axe Oz.
3) Projection orthogonale sur l'axe Oz.
4) Symétrie par rapport au mur suivie d'une projection dans la paroi.

2 Espaces vectoriels

Groupe

On sait que l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ supporte une opération interne, l'addition, qui satisfait à des propriétés algébriques : (l'addition est partout définie, elle est associative, il existe un élément neutre noté 0, chaque élément a possède un opposé noté $-a$, l'addition est commutative).

De manière générale, tout ensemble G, muni d'une opération interne satisfaisant aux conditions algébriques ci-dessus est appelée un **groupe commutatif**.

Exemples

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis de l'addition forment évidemment des groupes commutatifs !
- Les ensembles V_2 des vecteurs du plan et V_3 des vecteurs de l'espace, munis de l'addition vectorielle, forment des groupes commutatifs !
- $\mathbb{R}$ muni de la multiplication ne forme pas un groupe commutatif, pourquoi ?

Corps

On sait que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication.
Par rapport à l'addition, $\mathbb{R}$ forme un groupe commutatif.
La multiplication satisfait à des propriétés algébriques : (la multiplication est associative, il existe un élément neutre noté 1, chaque élément a sauf 0 possède un inverse noté $\frac{1}{a}$, la multiplication est commutative, elle est distributive par rapport à l'addition).

De manière générale, tout ensemble K muni de deux opérations internes (addition et multiplication) est un **corps** si les opérations satisfont aux propriétés suivantes :

- K muni de l'addition forme un groupe commutatif. (l'addition est associative, il existe un élément neutre noté 0, chaque élément a possède un opposé noté $-a$, l'addition est commutative)
- $K \setminus \{0\}$ forme un groupe pour la multiplication.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exemples

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps.
- L'ensemble V_3 des vecteurs de l'espace, muni de l'addition vectorielle et du produit vectoriel ne forme pas un corps car, par exemple, le produit vectoriel n'admet pas d'élément neutre !

Espaces vectoriels

Comme cela a été fait pour $\mathbb{N}$ et pour $\mathbb{R}$ ou peut caractériser algébriquement l'ensemble des vecteurs du plan V_2 ou de l'espace V_3. Un ensemble V ayant les même propriétés algébriques que V_2 ou V_3 est appelé espace vectoriel.

On obtient la définition.

Un ensemble V muni d'une opération interne (addition) et d'une opération externe (multiplication par un élément d'un corps K) est un espace vectoriel si les opérations satisfont aux propriétés suivantes :

- V muni de l'addition forme un groupe commutatif.
- L'opération externe est partout définie.
- $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$ pour tout $x \in K$ et $y \in K$ et pour tout $\vec{a} \in V$.
- $1\vec{a} = \vec{a}$ pour tout $\vec{a} \in V$.
- $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$ pour tout $x \in K$et pour tout $\vec{a} \in V$ *et* $\vec{b} \in V$.
- $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$ pour tout $x \in K$ et $y \in K$ et pour tout $\vec{a} \in V$.

On appelle **vecteurs** les éléments de l'espace vectoriel et **scalaires** les éléments du corps K.

K est généralement le corps des nombres réels.

Exemples

V_2, V_3, P_n muni de l'addition et de la multiplication par un réel forment des espaces vectoriels. (P_n = ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

Exercice 2

Vérifier que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

Vérifier que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 3

On considère l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ b \end{pmatrix}$$

Montrer que cet ensemble muni de ces deux opérations, n'est pas un espace vectoriel.

Dépendance et indépendance linéaire

Si l'on a n vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ d'un espace vectoriel, une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ est un nouveau vecteur de la forme $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des scalaires (nombres réels).

Dans un espace vectoriel, n vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ sont dit **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ qui soit égale au vecteur nul correspond à des scalaires x_i tous égaux à 0.

Dans le cas contraire, les vecteurs sont dits **linéairement dépendants.**

Base et dimension

Soit V un espace vectoriel et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs linéairement indépendants.
$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ forment une **base** de V si tout vecteur $\vec{v}$ de V peut être exprimé comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Donc, pour tout vecteur $\vec{v}$ de V, il existe n scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $\vec{v}$ peut être écrit sous la forme $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + \ldots + x_n\vec{u}_n$. Les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les **composantes** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n)$.

Toutes les bases d'un espace vectoriel V ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la **dimension** de V.

Théorème

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de V et $\vec{v}$ un vecteur.
La représentation du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n)$ est unique.

Démonstration

Supposons que l'on ait deux représentations de $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de base:
$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + \ldots + x_n\vec{u}_n = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3 + \ldots + y_n\vec{u}_n$
D'où $(x_1 - y_1)\vec{u}_1 + (x_2 - y_2)\vec{u}_2 + (x_3 - y_3)\vec{u}_3 + \ldots + (x_n - y_n)\vec{u}_n = \vec{0}$
donc, puisque les vecteurs de bases sont linéairement indépendants,
$x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0,\ x_3 - y_3 = 0$ et $x_n - y_n = 0$

Sous-espace vectoriel

W est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel V si W est un sous-ensemble de V et si W est un espace vectoriel.
On peut montrer que W est un sous-espace vectoriel de V si pour tout élément $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de W, $x\vec{a} + y\vec{b}$ est encore un élément de l'ensemble W

Exemple
V_2 est un sous-espace vectoriel de V_3.

Exercice 4

a) Montrer que l'ensemble P_2 des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un espace vectoriel puis donner une base de P_2.

b) Les polynômes $p_1 = x^2 + x + 4$, $p_2 = 2x^2 + x + 9$ et $p_3 = x^2 + 2x + 3$ forment-ils une base de P_2 ?

c) Montrer que l'ensemble des polynômes p qu'on peut exprimer sous la forme

$$p = \alpha\, p_1 + \beta\, p_2 + \gamma\, p_3, \ (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R})$$

forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel P_2.

Donner une base de cet espace.

Exercice 5

On note $M_{2,2}$ l'ensemble des matrices carrées

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R} \right\}$$

Les opérations dans $M_{2,2}$ sont définies de la façon suivante :

Addition de 2 matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par par un scalaire

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $M_{2,2}$ forme un espace vectoriel réel.

b) Donner une base de cet espace vectoriel.

c) Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}, \right\}$ forme un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}$.

d) L'ensemble des matrices $M_{2,2}$ forme-t-il un corps ?

La multiplication de deux matrices est définie (*lignes par colonnes*) par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Remarque

V_3 admet (en plus de lui-même) des sous-espaces vectoriels

- de dimension 0 $W_0 = \{\vec{o}\}$,
- de dimension 1, $W_1 = \{\vec{v} = \alpha\vec{a}\}$
- de dimension 2, $W_2 = \{\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\}$.

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** (ou simplement droite).

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel** (ou simplement plan.

Exercice 6

Dans V_3 on considère les vecteurs

$\vec{v}_1 = -\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ et $\vec{v}_3 = 10\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$

a) Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

b) Vérifier que les vecteurs $\vec{p}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{p}_2 = \vec{u}_3$ forment une base du sous-espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, puis décrire ce sous-espace vectoriel.

Exercice 7

Dans V_3 muni d'une base standard (orthonormée), on donne des vecteurs.
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel W engendré par ces vecteurs.

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-4\\-8\end{pmatrix}$

d) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$

e) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\6\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Vérifier que les deux derniers sous-espaces sont égaux, puis donner une base orthonormée de ce sous-espace vectoriel W.

f) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Vérifier que ce dernier sous-espace de V_3 est également un sous-espace vectoriel du plan vectoriel défini aux points d et e.

3 Applications linéaires

Soit V et W deux espaces vectoriels réels.
Une application f de V dans W est une **application linéaire** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ pour tout $\vec{a} \in V$ et $\vec{b} \in V$

$f(\lambda\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})$ pour tout $\vec{a} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemples d'applications linéaires de V_2 dans V_2

- symétrie axiale
- rotation d'angle α

Exemples d'applications linéaires de V_3 dans V_3 :

- rotation d'angle α autour de Oz
- homothétie

Contre-exemple

- L'application de V_2 dans V_2, $f: \vec{x} \longmapsto \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas une application linéaire.

Remarque

f linéaire $\Rightarrow$ $f(\vec{o}) = \vec{o}$

et donc (contraposée)

$f(\vec{o}) \neq \vec{o}$ $\Rightarrow$ f non linéaire.

Exercice 8

a) Vérifier que $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ est une application linéaire de V_2 dans V_2.

b) Vérifier que $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1+x \\ y \end{pmatrix}$ n'est pas une application linéaire de V_2 dans V_2.

Exercice 9

Montrer qu'une application f d'un espace vectoriel réel V vers un espace vectoriel réel W est linéaire si et seulement si

$f(x\vec{a} + y\vec{b}) = xf(\vec{a}) + yf(\vec{b})$ pour tout $\vec{a}$ et $\vec{b} \in V$ et pour tout x et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow V_2 \\ f : x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{l} V_3 \longrightarrow V_2 \\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$

c) $\begin{array}{l} V_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x+y \end{array}$

d) $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow V_2 \\ f : x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 11

On considère les transformations f de V_2 dans V_2 données ci-dessous.
Décrire en termes géométriques la transformation f si elle est linéaire, sinon expliquer pourquoi elle ne l'est pas.

a) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

b) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

d) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

e) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

f) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

Définition

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme** de V dans W.

Deux espaces vectoriels V et W sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de V sur W.

Exemples

1) $\begin{array}{l} V_2 \longrightarrow V_2 \\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme de V_2 dans V_2.

2) $\begin{array}{l} V_3 \longrightarrow P_2 \\ f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto ax^2+bx+c \end{array}$ est un isomorphisme V_3 dans P_2.

4 Noyau et image d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de V dans W.

On appelle **noyau** de f noté **Ker(f)**, l'ensemble des vecteurs de V dont l'image par f est $\vec{o}$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{v}; f(\vec{v}) = \vec{0}, \vec{v} \in V\right\}.$$

On appelle **image** de f noté **Im(f)**, l'ensemble des images par f des vecteurs de V.

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{w}; \exists \vec{v} \in V \text{ avec }, f(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Exemples

1) $f: \begin{array}{ccc} V_2 & \longrightarrow & V_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire de V_2 dans V_2 (exercice).

   $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v}; \vec{v} = \lambda \vec{u}_1\}$.

   $\mathrm{Im}(f) = \left\{\vec{w}; \vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2) $f: \begin{array}{ccc} V_3 & \longrightarrow & V_3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire de V_3 dans V_3 (exercice).

   Ker(f) = ensemble des vecteurs verticaux,

   Im(f) = ensemble des vecteurs horizontaux.

3) $f: \begin{array}{ccc} V_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x \end{array}$ est une application linéaire de V_2 dans $\mathbb{R}$ (exercice).

   Ker(f) = ?

   Im(f) = ?

Théorème

Soit f une application linéaire de V dans W.

1) Ker(f) est un sous-espace vectoriel de V.
2) Im(f) est un sous-espace vectoriel de W.

Démonstration

1) $\vec{a} \in \text{Ker}(f)$ et $\vec{b} \in \text{Ker}(f)$.

Montrons que toute combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartient encore à Ker(f).

$f\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha f\left(\vec{a}\right)+\beta f\left(\vec{b}\right)=\alpha\vec{o}+\beta\vec{o}=\vec{o}$ Ok !

2) $\vec{a} \in \text{Im}(f)$ et $\vec{b} \in \text{Im}(f)$.

Montrons que toute combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartient encore à Im(f).

Il existe $\vec{v} \in V$ et $\vec{w} \in V$ tel que $\vec{a} = f\left(\vec{v}\right)$ et $\vec{b} = f\left(\vec{w}\right)$.

mais $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha f\left(\vec{v}\right)+\beta f\left(\vec{w}\right)=f\left(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}\right)=f\left(\vec{z}\right)$.

donc $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \in \text{Im}\left(f\right)$ OK !

Théorème

Soit f une application linéaire de V dans W.
f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ $\text{Ker}\left(f\right)=\left\{\vec{o}\right\}$ et $\text{Im}\left(f\right)=W$.

Théorème

Soit f une application linéaire de V dans W : dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V).

Théorème

Soit f une application linéaire de V dans V.
$\text{Ker}\left(f\right)=\left\{\vec{o}\right\} \Longleftrightarrow$ l'image de toute base de V est une base de V.

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $\left(\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\right)$ une base de V.

Vérifions que $f\left(\vec{u}_1\right),\cdots,f\left(\vec{u}_n\right)$ sont linéairement indépendants :

$$\lambda_1 f\left(\vec{u}_1\right)+\cdots+\lambda_n f\left(\vec{u}_n\right)=\vec{o} \Leftrightarrow f\left(\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_n\vec{u}_n\right)=\vec{o}$$

$$\underset{\text{Ker}(f)=0}{\underbrace{\Leftrightarrow}} \quad \lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_n\vec{u}_n=\vec{o} \Leftrightarrow \lambda_1=0,\cdots,\lambda_n=0.$$

$\Leftarrow$ Posons que $f\left(\vec{v}\right)=\vec{o}$ et vérifions (en utilisant la propriété que l'image de toute base est une base) que $\vec{v}=\vec{o}$.

$$f\left(\vec{v}\right)=\vec{o} \Rightarrow f\left(v_1\vec{u}_1+\cdots+v_n\vec{u}_n\right)=\vec{o} \Rightarrow v_1 f\left(\vec{u}_1\right)+\cdots+v_n f\left(\vec{u}_n\right)=\vec{o}$$

$$\underset{f(\vec{u}_1),\cdots,f(\vec{u}_n)\text{ lin. indep.}}{\underbrace{\Rightarrow}} \quad v_1=0,\cdots v_n=0 \Rightarrow \vec{v}=\vec{o}.$$

Définition

Une application linéaire f est dite **régulière** si $\operatorname{Ker}(f) = \vec{o}$ sinon elle est dite **singulière.**

Donc f est dite singulière si il existe $\vec{v} \neq \vec{o}$ avec $f(\vec{v}) = \vec{o}$.

Remarque

Si f est une application linéaire de V dans V alors:

f isomorphisme $\Longleftrightarrow$ f régulière $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{o}\}$

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im}(f) = V$ $\Longleftrightarrow$ f(base) = base

Exercice 12

Chercher les noyaux et les images des applications linéaires des exercices 10 et 11

Donner dim(Ker(f)) et dim(Im(f))

Donner une base de Ker(f) et une base de Im(f)

5 Matrices et applications linéaires

Si f est linéaire, on a : $f(\vec{v}) = f(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) = xf(\vec{u}_1) + yf(\vec{u}_2)$ pour tout vecteur $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$.

Donc, si l'on connaît les images des vecteurs de base, on peut déterminer l'image de n'importe quel vecteur.

Une application linéaire est donc définie par les images $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ des vecteurs de base $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Si $f(\vec{u}_1) = a\vec{u}_1 + c\vec{u}_2$ et $f(\vec{u}_2) = b\vec{u}_1 + d\vec{u}_2$ (les images des vecteurs de base) alors l'image d'un vecteur $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ est

$$f(\vec{v}) = xf(\vec{u}_1) + yf(\vec{u}_2) = (ax + by)\vec{u}_1 + (cx + dy)\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Les colonnes de la matrice d'une application linéaire sont formées par les images des vecteurs de base.

Exemples

1) Considérons l'application linéaire f de V_2 dans V_2 donnée par $f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1$ et $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$.
   Cherchons alors l'image d'un vecteur $\vec{v} = 5\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2$.
   $f(\vec{v}) = f(5\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2) = 5f(\vec{u}_1) + 7f(\vec{u}_2) = 15\vec{u}_1 + 7(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 22\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2$
   On peut calculer l'image d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice
   $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -7 \end{pmatrix}$
   A est la matrice de l'application linéaire f.

2) f de V_2 dans V_2 décrit une rotation de 60°.
   On a $f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{pmatrix}$ et $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(60°) \\ \cos(60°) \end{pmatrix}$
   On peut calculer l'image d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice
   $A = \begin{pmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) \\ \sin(60°) & \cos(60°) \end{pmatrix}$
   $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

Exercice 13

Soit $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$ de V_2 dans V_2.

a) Vérifier que f est une application linéaire bijective (isomorphisme)
b) Déterminer l'image par f de la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ de V_2
c) Donner la matrice de f.
d) Trouver les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $f(\vec{v}_1) = \vec{u}_1$ et $f(\vec{v}_2) = \vec{u}_2$.

Les colonnes de la matrice M d'une application linéaire f sont formées par les images des vecteurs de base.

$$f(\vec{v}) = M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z \end{pmatrix}$$

On a bien :

$$f(\vec{u}_1) = M \cdot \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 \\ a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_2) = M \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 + a_{23} \cdot 0 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} \cdot 1 + a_{33} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_3) = M \cdot \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 1 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Exercice 14

Trouver les matrices des applications linéaires de V_2 dans V_2 :

a) Homothétie de rapport 3

b) Symétrie d'axe Ox,
symétrie d'axe Oy

c) Symétrie centrale

d) Symétrie d'axe $y = x$

e) Rotation de 30°

f) Projection orthogonale sur l'axe Ox,
Projection orthogonale sur l'axe sur l'axe Oy

g) Projection sur l'axe Ox de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

h) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$

i) Symétrie d'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$

j) Affinité axiale d'axe Ox, de direction $\vec{u}_2$ de rapport -2.

k) Affinité axiale d'axe Ox, de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ de rapport 2.

Exercice 15

Décrire géométriquement les applications linéaires de V_3 dans V_3 données ci-dessous, préciser Im(f) et Ker(f) et donner leurs matrices.

a) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ b) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ c) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ d) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$

Exercice 16

Trouver les matrices des applications linéaires de V_3 dans V_3.

a) Symétrie planaire de plan $x = y$

b) Rotation de 120° autour de l'axe de direction $\vec{u}_1$

c) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

d) Projection verticale sur le plan $x + y - z = 0$

e) Projection orthogonale sur le plan $x + y - z = 0$

f) Symétrie planaire de plan $x + y - z = 0$

Exercice 17

A) Soit l'application f de V_2 dans V_2 qui, à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\vec{w} = f(\vec{v})$ obtenu par rotation de 90°.

a) Donner la matrice M de f dans la base $\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}$

Trouver l'image de $\vec{o}$, de $\vec{a} = 5\vec{u}_2$, de $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et de $\vec{c} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$

b) On considère l'application $g = f \circ f$, donner la matrice N de g puis vérifier que $N = M \cdot M$

c) On considère l'application $h = f^{-1}$, donner la matrice R de h puis vérifier que $M \cdot R = I$ où I est la matrice identité.

B) Soit l'application f de V_3 dans V_3 qui, à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\vec{w} = f(\vec{v})$ obtenu par rotation de 90° autour de l'axe de direction $\vec{u}_3$.

a) Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$

Trouver l'image de $\vec{o}$, $\vec{a} = 5\vec{u}_2$, $\vec{b} = 3\vec{u}_3$, $\vec{c} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3$ et $\vec{d} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$

b) On considère l'application $g = f \circ f$, donner la matrice N de g puis vérifier que $N = M \cdot M$

c) On considère l'application $h = f^{-1}$, donner la matrice R de h puis vérifier que $M \cdot R = I$ où I est la matrice identité.

Exercice 18

Une application linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par son noyau
$Ker(f) = \left\{\vec{v}; \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et par un vecteur invariant, $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
Trouver la matrice de f.

Exercice 19

Une application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par sa matrice

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Déterminer les sous espaces vectoriels de V_3 suivants : $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et l'ensemble des vecteurs invariants.

6 Compositions d'applications linéaires

Soit f une application linéaire de U dans V et g une application linéaire de V dans W.

A est la matrice de f et B la matrice de g.

Si $h = g \circ f$ est application composée de f et g $\left(h(\vec{v}) = g\left(f(\vec{v})\right)\right)$, la matrice C de h est le produit des matrices B et A , donc $C = B \cdot A$

Remarque

Le produit matriciel se calcule *lignes par colonnes*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aj+bm+cp & ak+bn+cq & al+bo+cr \\ dj+em+fp & dk+en+fq & dl+eo+fr \\ gj+hm+ip & gk+hn+iq & gl+ho+ir \end{pmatrix}$$

Exercice 20

Calculer, si possible, les produits matriciels $A \cdot B$ et $B \cdot A$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 21

f de V_2 dans V_2 décrit une rotation de 30°, g une rotation de 60°.

Donner la matrice A de f et la matrice B de g puis calculer A^2, A^3 et $A \cdot B$

Exercice 22

On considère l'application V_3 dans V_3 :

$$f : \vec{v} \mapsto \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) \quad \text{où} \quad \vec{u} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2$$

Décrire f géométriquement puis donner sa matrice P par rapport à la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

Calculer les matrices $Q = I - P$, P^2, Q^2 et $P \cdot Q$ où I est la matrice de l'application identique.

Calculer le noyau et les vecteurs invariants de Q, puis décrire Q géométriquement.

Exercice 23

Soit f une application linéaire de V_3 dans V_3 telle que

$f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ et $f(\vec{u}_3) = -4\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3$

a) Trouver l'image de $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ et celle de $\vec{b} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$

b) L'application f est-elle bijective ?

c) Trouver l'image réciproque de $\vec{c} = 2\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ puis celle de $\vec{d} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3$

7 Réciproque d'une application linéaire, matrice inverse

Soit une application linéaire f de V dans W.

f est inversible s'il existe une application linéaire f^{-1}, de W dans V, telle que $f^{-1} \circ f = i$, i étant l'application identique ou identité.

f^{-1} s'appelle l'application **réciproque** de f.

Si A est la matrice de f et A^{-1} celle de f^{-1}, on a $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$, I étant la matrice identité. A^{-1} s'appelle la matrice inverse de la matrice A.

Remarque

f inversible $\Longleftrightarrow$ f régulière $\Longleftrightarrow$ Ker(f) = $\{\vec{o}\}$

Exercice 24

Décrire, si possible, les réciproques des applications de l'exercice 15.

Exercice 25

Calculer la matrice inverse de A en posant $A \cdot A^{-1} = I$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Calcul matriciel

Déterminant d'une matrice $= \det(A) = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Propriétés du déterminant

- le déterminant est le résultat d'un produit mixte
- le déterminant ne change pas si on échange le rôle des lignes et des colonnes
- le déterminant change de signe si on permute 2 rangées (lignes ou colonnes)
- le déterminant ne change pas si on ajoute à une lignes (ou colonne) une combinaison linéaire quelconque des autres lignes (ou colonnes)
- le déterminant est nul si une rangée est une combinaison linéaire des autres rangées
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $\left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- $\left|\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} \\ \lambda \cdot a_{31} & \lambda \cdot a_{32} & \lambda \cdot a_{33} \end{pmatrix}\right| = \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

La matrice **transposée** de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice

Étant donnée une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et un élément a_{ij} de A, la matrice mineure M_{ij} associée à l'élément a_{ij} de la matrice A est la matrice 2x2 obtenue en supprimant de A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $M_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ...

Le déterminant de M_{ij} est appelé le mineur de a_{ij}

On appelle cofacteur de a_{ij} le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$.

On a ainsi $|A| = \det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$.

La matrice **inverse** de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^tF$.

où $F = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Marche à suivre pour trouver l'inverse A^{-1} d'une matrice A.

- Calculer le déterminant matrice $|A|$ de la matrice A. S'il est nul A n'est pas inversible.
- Écrire la matrice F formée des cofacteurs de la matrice A.
- Transposer la matrice F.
- Écrire la matrice $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^tF$.

Exercice : écrire la matrice A^{-1} et vérifier que $A \cdot A^{-1} = I$.

Remarque

Si A est la matrice de f alors

f régulière $\Longleftrightarrow$ A^{-1} existe $\Longleftrightarrow$ $\text{Det}(A) \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \{\vec{o}\}$
$\Longleftrightarrow$ f(base) est une base

Exercice 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculer $|A|$, $|B|$ et $|A \cdot B|$

Exercice 27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, calculer

$\det(A)$, $\det(B)$, $A \cdot B$, $\det(A \cdot B)$, A^{-1}, $\det(A^{-1})$, B^{-1}, $\det(B^{-1})$

Exercice 28

Calculer l'inverse des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 29

Une transformation linéaire f est donnée par sa matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -13 \end{pmatrix}$

a) trouver la matrice des transformations f^{-1} et $(f \circ f)^{-1}$

b) trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 22\vec{u}_3$

8 Affinités générales

À une application linéaire f de V_3 dans V_3 correspond une transformation géométrique de R^3 dans R^3 qui à un point $P(x; y; z)$ fait correspondre le point $P'(x'; y'; z')$ tel que $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}$.

On appelle *affinité générale* ou simplement *affinité* une telle transformation composée avec une translation $\overrightarrow{OP'} = f(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{OO'}$.

Une affinité peut être exprimée par $\overrightarrow{OP'} = M \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$ où M est la matrice de l'application linéaire correspondante et O' est l'image de l'origine O.

Une affinité du plan peut être donnée par $\begin{cases} x' = ax + bx + e \\ y' = cx + dx + f \end{cases}$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire associés et $O'(e; f)$.

Une affinité régulière conserve le degré d'une équation; ainsi l'image d'une droite est une droite, l'image d'un cercle est une ellipse et l'image d'un plan est un plan. Une affinité conserve le parallélisme mais elle ne conserve généralement pas les angles.

Exemple

L'affinité f décrit une rotation de 60° autour du point $C(4; 2)$.

La matrice M d'une rotation de 60° (peu importe le centre de la rotation pour déterminer la matrice qui s'applique à des vecteurs) s'écrit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

L'affinité s'écrit : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + e \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + f \end{cases}$. Pour trouver e et f on utilise le fait que

$C(4; 2)$ est un point fixe, donc que $\begin{cases} 4 = \frac{1}{2}4 - \frac{\sqrt{3}}{2}2 + e \\ 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}4 + \frac{1}{2}2 + f \end{cases}$

$\Rightarrow\ e = 2 + \sqrt{3}$ et $f = 1 - 2\sqrt{3}$, d'où f: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

Exercice 30

On donne une affinité générale par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) Trouver l'image de la droite $d : x - y + 1 = 0$ (après avoir déterminé l'équation paramétrique de d).

b) Trouver l'ensemble des points qui ont comme image la parabole $y = x^2$.

Exercice 31

On donne une affinité du plan par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et par l'image $O'(-4; 4)$ de l'origine.

a) Trouver les points fixes.

b) Trouver l'ensemble des points qui ont comme image la droite $a': x - y + 2 = 0$.

c) Chercher l'expression de l'affinité réciproque.

d) Déterminer l'équation de l'image de la droite $b: x - y + 2 = 0$

e) Déterminer l'équation de l'image du cercle unité : $x^2 + y^2 = 1$.

f) Déterminer les équations des images des droites $d: x + y + c = 0$.

Exercice 32

a) Quel est le centre de la rotation que l'on obtient en effectuant d'abord une rotation de 180° autour de $A(1; -1)$ puis une rotation de -90° autour de $B(3; 1)$?

b) Le centre serait-il le même si l'on avait composé les rotations dans l'autre sens ?

Exercice 33

On donne l'affinité générale par $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - 2y - 3 \end{cases}$

a) Monter que l'affinité contient une droite invariante point par point, droite dont on donnera l'équation.

b) Les verticales sont globalement invariantes, pourquoi ?

c) On considère le cercle trigonométrique c, $T(0; 1)$ un de ses point et t la tangente au cercle en T, ainsi que leurs images c', T' et t' par l'affinité.
Trouver les coordonnées de T' et les équations de c' et t'.

d) Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont l'image est horizontale.
En déduire les équations des tangentes au cercle dont les images sont horizontales

e) Interpréter géométriquement cette affinité.

Exercice 34

Dans l'espace, on considère l'affinité f de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ qui laisse fixe le point $A(1; 1; 2)$.

a) Quelle est l'image de l'origine par cette affinité ?

b) Quelle est l'image par cette affinité du plan π contenant le point A et les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

c) Quelle est l'image par cette affinité de la droite c qui passe par A parallèlement au vecteur $\vec{c} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$?

d) Quelle est l'image d' par cette affinité de la droite d qui passe par $B(1; 2; 3)$ parallèlement au vecteur $\vec{d} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$? Vérifier que la droite d' appartient au plan α formé par le point A et les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

e) Donner l'image P' par f d'un point $P(4; 2; 1)$.
Trouver les coordonnées du point P^*, intersection de la droite passant par P parallèlement à $\vec{b}$ avec le plan α.

f) Décrire géométriquement l'affinité f.

9 Valeurs et vecteurs propres

Un nombre λ est appelé **valeur propre** d'une application linéaire f s'il existe un vecteur $\vec{p}$ tel que $f(\vec{p}) = \lambda\vec{p}$ (le vecteur $\bar{p}$ est parallèle à son image)

$\bar{p}$ est le **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ

Un vecteur propre de valeur propre λ est appelé $\lambda -$ propre.

- $\vec{p}$ est un vecteur λ −propre si $f(\vec{p}) = \lambda\vec{p}$.
- Un vecteur $0 -$ propre appartient à $(Ker(f)$.
- Un vecteur $1 -$ propre est un vecteur invariant.
- L'image $f(\vec{p})$ d'un vecteur $\lambda -$ propre $\vec{p}$ $(\lambda \neq 0)$ est parallèle à $\vec{p}$.

Remarques

- Si $\vec{p}$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ, alors $k \cdot \vec{p}$ est également un vecteur propre de valeur propre λ.
  $f(k \cdot \vec{p}) = k \cdot f(\vec{p}) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{p}) = \lambda \cdot (k \cdot \vec{p})$
- Si $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont deux vecteurs propres correspondant à la même valeur propre λ, alors $\alpha \cdot \vec{p}_1 + \beta \cdot \vec{p}_2$ est encore un vecteur propre de valeur propre λ.
  $$f(\alpha \cdot \vec{p}_1 + \beta \cdot \vec{p}_2) = \alpha \cdot f(\vec{p}_1) + \beta \cdot f(\vec{p}_2) = \alpha \cdot (\lambda \cdot \vec{p}_1) + \beta \cdot (\lambda \cdot \vec{p}_2)$$
  $$= \lambda \cdot (\alpha \cdot \vec{p}_1 + \beta \cdot \vec{p}_2)$$
- L'ensemble de tous les vecteurs propres de f correspondant à la valeur propre λ forme un sous-espace vectoriel de V appelé **espace-propre** de λ.
- λ est une valeur propre de $A \iff \det(A - \lambda{\cdot}I) = 0$
  $$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \iff A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{o} \iff (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{o}$$
  $$\iff A - \lambda \cdot I \text{ singulière} \iff \det(A - \lambda \cdot I) = 0$$
- **On obtient donc les valeurs propres d'une application linéaire f décrite par une matrice A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda{\cdot}I) = 0$ où I est la matrice unité.**

  Le polynôme $\det(A - \lambda{\cdot}I)$ est appelée **polynôme caractéristique** de f.

  L'espace propre de λ est $\mathrm{Ker}(A - \lambda{\cdot}I)$
- A des valeurs propres distinctes correspondent des vecteurs propres linéairement indépendants.

Exercice 35

Trouver les valeurs et les vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 36

Une application linéaire f est donnée dans une base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ par sa matrice A.

a) $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & 10\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

b) Dessiner les vecteurs propres et construire l'image d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque.

c) Donner si possible la matrice B de f dans la base $(\vec{p}_1;\vec{p}_2)$ formée de vecteurs propres.

d) Calculer l'image de $\vec{a}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ et celle de $\vec{b}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$

Exercice 37

Une transformation linéaire f est donnée par sa matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

Calculer les valeurs et les vecteurs propres de f et de f^{-1}.

Exercice 38

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des applications linéaires données, dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$, par les matrices ci-dessous puis décrire géométriquement ces applications.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

Exercice 39

Calculer valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires données, dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$, par les matrices ci-dessous puis décrire géométriquement ces applications

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Exercice 40

Chercher les valeurs et vecteurs propres de l'application f donnée, dans la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, par la matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Cette même application f peut être décrite dans une base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Préciser la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$.

Remarque

Si $\vec{p}$ est un vecteur λ -propre de l'application linéaire f de matrice A, alors

- $\vec{p}$ est un vecteur $\frac{1}{\lambda}$ -propre de l'application linéaire f^{-1} de matrice A^{-1};
- $\vec{p}$ est un vecteur λ^2-propre de l'application linéaire $f \circ f$ de matrice A^2;
- $\vec{p}$ est un vecteur λ^n-propre de l'application linéaire $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ de matrice A^n;

Espaces propres des matrices 3 x 3

1. L'équation caractéristique possède 1 solution réelle λ et 2 solutions imaginaires $\Longrightarrow$ l'espace propre correspondant est de dimension 1.
2. L'équation caractéristique possède 3 solutions réelles distinctes $\Longrightarrow$ Les 3 vecteurs propres $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ sont linéairement indépendants et chaque espace propre est de dimension 1.
3. De façon générale la dimension de l'espace propre de valeur propre λ est donnée par les solutions du système de 3 équations $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ et cet espace propre est
   - De dimension 1 : une équation peut être exprimée comme combinaison des 2 autres.
     Si $\vec{p}_1$ est un vecteur propre de valeur propre λ, les vecteurs $\lambda -$ propre s'expriment par $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{p}_1$ est l'espace $\lambda -$ propre est donné sous la forme $\{\vec{p} = \alpha \cdot \vec{p}_1\}$.
   - De dimension 2 : les 3 équations sont équivalentes à une équation $ax + by + cz = 0$.
     Si $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ est un vecteur propre de valeur propre λ, les vecteurs $\lambda -$ propre s'expriment par $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{p}_1 + \beta \cdot \vec{p}_2$ est l'espace $\lambda -$ propre est donné sous la forme $\{ \vec{p} = \alpha \cdot \vec{p}_1 + \beta \cdot \vec{p}_2\}$.
   - De dimension 3 : les 3 équations se simplifient en une équation $0 = 0$.
     Tout vecteur est $\lambda -$ propre propre et l'espace $\lambda -$ propre est V_3.

10 Changement de base

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$. et $\mathcal{B}' = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ deux bases de V_3.
On appelle matrice de changement de base, la matrice P qui au vecteur $\vec{u}_1$ de $\mathcal{B}$ fait correspondre le vecteur $\vec{a}$ de $\mathcal{B}'$, au vecteur $\vec{u}_2$ le vecteur $\vec{b}$ et au vecteur $\vec{u}_3$ le vecteur $\vec{c}$ (donc $P \cdot \vec{u}_1 = \vec{a}$, $P \cdot \vec{u}_2 = \vec{b}$ et $P \cdot \vec{u}_3 = \vec{c}$).

Si $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$ et $\vec{c} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$ alors

la matrice $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix}$ est la **matrice de changement de base**.

Remarque

P est toujours inversible (pourquoi ?).

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}; \vec{b})$ avec $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{b} = -2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

On a $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que $P \cdot \vec{u}_1 = \vec{a}$ et $P \cdot \vec{u}_2 = \vec{b}$ et que $P^{-1} \cdot \vec{a} = \vec{u}_1$ et $P^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{u}_2$.

Nouvelle expression d'un vecteur lors d'un changement de base

Si $\vec{v}_B$ est l'expression d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base $\mathcal{B}$ et $\vec{v}_{B'}$ l'expression de ce même dans une base $\mathcal{B}'$, alors

$$\boxed{P^{-1} \cdot \vec{v}_B = \vec{v}_{B'} \quad \text{et} \quad P \cdot \vec{v}_{B'} = \vec{v}_B}$$

Démonstration

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} = x'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Attention

La matrice P permet de passer de la représentation d'un vecteur dans la base B' à la représentation du même vecteur dans la base $\mathcal{B}$.
La matrice P^{-1} permet de passer de la représentation d'un vecteur dans la base B à la représentation du même vecteur dans la base $\mathcal{B}'$.

Exemple

Soit $B = \left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)$ et $B' = \left(\vec{a};\vec{b}\right)$ avec $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{b} = -2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

On a $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Si $\vec{v} = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ alors $\vec{v}_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{9}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

Exercice 41

Dans V_2 on considère les bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2)$. avec $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$.
Donner la matrice de changement de base P et son inverse P^{-1}
Exprimer les vecteurs $\vec{a} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{b} = 2\vec{u}_1$ et $\vec{c} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 42

Dans V_3 on considère la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$. ainsi que la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$.
où $\vec{v}_1 = -4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ et $\vec{v}_3 = 8\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + \vec{u}_3$
Donner la matrice de changement de base P et son inverse P^{-1}
Exprimer les vecteurs $\vec{a} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\vec{b} = -\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$ et $\vec{c} = 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Nouvelle expression d'une matrice lors d'un changement de base

Soit f une application linéaire et

- M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ donc $M \cdot \vec{v}_B = \vec{w}_B$
- M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ donc $M' \cdot \vec{v}_{B'} = \vec{w}_{B'}$

On a : $\underbrace{M \cdot \vec{v}_B}_{\vec{w}_B} = \underbrace{P \cdot \underbrace{M' \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot \vec{v}_B}_{\vec{v}_{B'}}}_{\vec{w}_{B'}}}_{\vec{w}_B}$

$$\begin{tikzcd}
\vec{v}_B \arrow[r, "M"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \vec{w}_B \\
\vec{v}_{B'} \arrow[r, "M'"'] & \vec{w}_{B'} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

Donc: $M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$ et $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$

Définition

Deux matrices M et N sont dites **semblables** s'il existe une matrice P telle que $N = P^{-1} \cdot M \cdot P$.
Deux matrices semblables décrivent la même application linéaire dans des bases différentes.

Exercice 43

a) L'application linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.
Soit $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
Vérifier que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ forment une base $\mathcal{B}'$ de V_2 puis chercher la matrice M' de f relativement à cette base.
Comparer $\det(M)$ et $\det(M')$ où M' est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$.

b) L'application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par sa matrice
$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.
Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ où
$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3, \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2,$ et $\vec{v}_3 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.
Décrire géométriquement l'application f.

c) Donner, par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$., la matrice M décrivant la projection orthogonale sur le plan définis par les vecteurs $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ et
$\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_3$.

d) Donner, par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, la matrice M décrivant une rotation de 30° autour de l'axe parallèle à $\vec{v}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_3$.

Exercice 44

a) L'application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par la matrice
$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$
où $\vec{v}_1 = \vec{u}_3, \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2$ et $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.
Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

b) On donne le plan (vectoriel) d'équation $\pi: x - y = 0$.
Donner une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ avec $\vec{v}_3$ perpendiculaire au plan π, puis déterminer la matrice décrivant une symétrie planaire de plan π.

11 Représentation d'une application linéaire dans une base de vecteurs propres

Soit f est une application linéaire de V_3 vers V_3 possédant 3 vecteurs propres linéairement indépendants, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$.

On a $f(\vec{p}_k) = \lambda_k \cdot \vec{p}_k$.

La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3)$ formée des vecteurs propres s'écrit $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

N est une matrice **réduite** semblable (équivalente) à la matrice M de f relativement à la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

Une matrice A est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice réduite (réduite = diagonale).

Remarques

A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

A possède 3 valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diagonalisable.

Exercice 45

Diagonaliser si possible les matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 63 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 46

Une transformation linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^{-1}, A^2, A^3.
2) Calculer les valeurs et vecteurs propres de f et de $f \circ f$.
3) Choisir une base de vecteurs propres de f puis donner dans cette base la matrice B de f.
4) Calculer B^{-1}, B^2, B^3 et B^n.
5) En utilisant la base propre de f, calculer la matrice A^n.
   Vérifier le résultat en posant successivement $n = -1$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 47

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre plus de possibilités d'emplois.

20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour trouver un meilleur emploi.

Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en X, quelle est la population de X et de Y au bout de 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 100 ans ?

12 Applications particulières

Applications symétriques

Une application linéaire f est **symétrique** $\Longleftrightarrow$ $f(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot f(\vec{y})\ \ \forall\vec{x},\vec{y}\in V$.

Le symbole $\cdot$ est le symbole du produit scalaire.
Une matrice A est dite symétrique si elle est la matrice d'une application symétrique f relativement à une base orthonormée.

Propriétés des applications symétriques

- A symétrique $\Longleftrightarrow$ A symétrique par rapport à sa diagonale principale.
- f symétrique $\Rightarrow$ les valeurs propres sont réelles.
- f symétrique $\Longleftrightarrow$ les vecteurs propres de valeurs propres différentes sont perpendiculaires.
- f symétrique $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

Exercice 48

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}=(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ on donne une application linéaire f par sa matrice $A=\begin{pmatrix}-10 & -4 & 10\\ -4 & 2 & -14\\ 10 & -14 & -1\end{pmatrix}$.

a) Vérifier que f est symétrique.

b) Vérifier que les valeurs propres sont distinctes et que les vecteurs propres sont perpendiculaires entre eux.

Applications orthogonales

Une application linéaire f est **orthogonale** $\Longleftrightarrow$ $f(\vec{x})\cdot f(\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}\ \ \forall\vec{x},\vec{y}\in V$.

Une application orthogonale conserve le produit scalaire et les propriétés y relatives, comme les longueurs et les angles.

Une matrice A est dite orthogonale si elle est la matrice d'une application orthogonale relativement à une base orthonormée.

Propriétés des applications orthogonales

- L'image d'une base orthonormée est une base orthonormée
  (cette propriété permet de reconnaître les matrices orthogonales)
- A orthogonale $\Longleftrightarrow {}^tA = A^{-1}$
- A orthogonale $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$
- A orthogonale $\Rightarrow$ valeurs propres de A sont ± 1
- La composition de deux applications orthogonales est orthogonale
- f orthogonale $\Rightarrow$ f est une isométrie

Dans V_3
- rotation autour d'un axe $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A) = 1$
- symétrie planaire et rotations $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A) = -1$

Dans V_2
- rotation $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A) = 1$
- symétrie axiale $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A) = -1$

Exercice 49

Vérifier que la matrice $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'une application linéaire f de V_2 dans V_2 exprimée dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ est orthogonale puis déterminer la matrice inverse M^{-1} (constatation ?).

Exercice 50

Décrire géométriquement les transformations orthogonales données dans la base $B = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$ par les matrices

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

13 Matrices et transformation géométrique de V_3

Les droites (axes) de V_3 sont des droites vectorielles, elles ne sont définies que par leur direction et généralement données par un vecteur. Elles forment un sous-espace vectoriel de dimension 1 de V_3.
Les plans de V_3 sont des plans vectoriels, ils ne sont définis que par leur direction et généralement donnés par 2 vecteurs non parallèles. On peut également définir un plan par une équation cartésienne $ax + by + cz = 0$. Ils forment un sous-espace vectoriel de dimension 2 de V_3.

Dans V_3 une application linéaire transforme des vecteurs en d'autres vecteurs. L'image d'un plan vectoriel est un plan vectoriel, une droite vectorielle ou le vecteur nul. L'image d'une droite vectorielle est une droite vectorielle ou le vecteur nul.

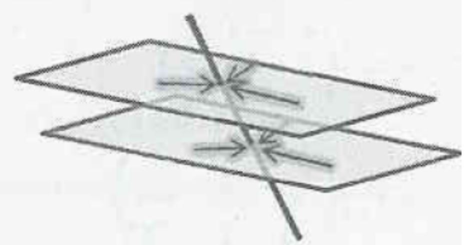
À une application linéaire de V_3 dans V_3 correspond une affinité générale de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (à ne pas confondre avec les affinités planaires et axiales). Une affinité générale peut être donnée par l'application linéaire correspondante et par l'image de l'origine. Une affinité générale transforme des points en d'autres points, elle transforme des droites, des plans en d'autres droites ou plans.

Homothétie de rapport k

Tout vecteur est k-propre. La matrice d'une homothétie est $M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

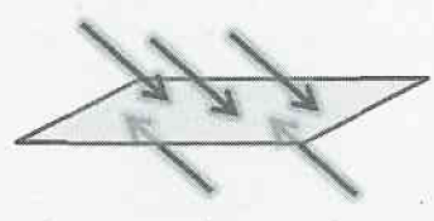
Projection sur un axe parallèle à $\vec{a}$ de direction parallèle à $\vec{b}$ et à $\vec{c}$

L'axe est 1-propre (vecteur $\vec{a}$).
La direction de projection est parallèle au plan formé des vecteurs 0-propres (vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$).
Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Projection sur un plan parallèle à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de direction parallèle à $\vec{c}$

Le plan est 1-propre (vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$).
La direction de projection est parallèle au vecteur 0-propre (vecteur $\vec{c}$).
Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Symétrie axiale d'axe parallèle à $\vec{a}$ (ou rotation de 180° autour de $\vec{a}$)

L'axe de symétrie est 1-propre (vecteur $\vec{a}$).

Le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie est -1-propre ($\vec{b}$ et $\vec{c}$, les deux perpendiculaires à $\vec{a}$).

Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit
$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Symétrie planaire de plan parallèle à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$

Le plan est 1-propre (vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$).
La droite perpendiculaire au plan de symétrie est -1-propre (vecteur $\vec{c}$ perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$).

Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit
$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Affinité axiale d'axe parallèle à $\vec{a}$, de direction parallèle à $\vec{b}$ et à $\vec{c}$ et de rapport k.

L'axe est 1-propre (vecteur $\vec{a}$).
La direction d'affinité est parallèle au plan formé des vecteurs k-propres (vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$).

Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit
$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Affinité planaire de plan parallèle à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, de direction parallèle à $\vec{c}$ et de rapport k.

Le plan est 1-propre (vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$).
La direction d'affinité est parallèle au vecteur k-propre (vecteur $\vec{c}$).

Dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des vecteurs propres, la matrice s'écrit
$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Rotation d'angle α autour de l'axe parallèle à $\vec{a}$.

La matrice d'une rotation est une matrice orthogonale de déterminant +1.
L'axe de rotation est le vecteur 1-propre ($\vec{a}$).
$\alpha = \sphericalangle(\vec{v}, f(\vec{v}))$ où $\vec{v}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{a}$.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{a}$ étant le vecteur 1-propre, la matrice s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Description géométrique d'une application linéaire donnée par une matrice

1) Vérifier si la matrice est orthogonale et, si elle l'est, déterminer si son déterminant est égal à 1 ou à -1.
   S'il est égal à 1, il s'agit d'une rotation autour du vecteur 1-propre (à déterminer) d'angle à déterminer (angle entre un vecteur perpendiculaire à l'axe et son image).
   S'il est égal à -1, il s'agit d'une rotation autour du vecteur -1-propre (à déterminer) d'angle à déterminer (angle entre un vecteur perpendiculaire à l'axe et son image) suivie par une symétrie planaire de plan perpendiculaire à l'axe de rotation.
2) Calculer valeurs et vecteurs propres, en déduire une description géométrique. Par exemple si les vecteurs propres $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ sont perpendiculaires (2 à 2) de valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -2$, la matrice décrit une homothétie de rapport 2, suivie d'une projection orthogonale sur le plan perpendiculaire $\vec{p}_1$ (parallèle à $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$), suivie par une symétrie d'axe parallèle à $\vec{p}_2$.

Exercice 51

On considère le plan π: $x - y = 0$, ainsi que la droite d passant par l'origine parallèlement au vecteur $\vec{d} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

a) On considère l'application linéaire f qui associe à un vecteur $\vec{v}$ son symétrique par rapport à π.
   Donner l'image par f des vecteurs de base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, puis la matrice M de cette symétrie ainsi que les matrices M^2 et M^{-1}.
   Quels sont les valeurs et les vecteurs propres de f ?
b) Donner la matrice N de la projection orthogonale sur le plan π ainsi que les matrices N^2 et MN.
c) On considère l'application linéaire g qui associe à un vecteur $\vec{v}$ sa projection sur le plan π parallèlement à $\vec{d}$. Donner une base $(\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3)$, par rapport à laquelle la matrice G' de g s'écrit $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$., puis déterminer la matrice G de g par rapport à la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.
d) On considère l'application linéaire h, donnée, dans la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, par la matrice $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Trouver les valeurs et les vecteurs propres de H, puis caractériser géométriquement l'application h.

Exercice 52

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé standard, une transformation linéaire est donnée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & b \end{pmatrix}$, a et b étant deux nombres donnés.

a) Calculer l'image du vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire qu'il s'agit d'un vecteur propre. Donner la valeur propre correspondante.

b) Si $a = 0$ et et $b = 1$ M est la matrice d'une symétrie planaire. Par observation géométrique, donner un vecteur perpendiculaire au plan de symétrie.

c) Si $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$, expliquer pourquoi M est la matrice d'une rotation autour d'un axe. Vérifier que $\vec{t}$ est un vecteur directeur de l'axe, puis déterminer l'angle de rotation.

Pour la fin du problème, on choisit $a = 1$ et $b = 2$ si bien que
$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) En admettant que $Det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$, I désignant la matrice de l'identité, déterminer les valeurs propres de M. En déduire, sans nouveaux calculs, que la matrice est diagonalisable.

e) Quels sont les vecteurs dont l'image par la transformation de matrice M est nulle ?

Dans l'espace, on considère l'affinité de matrice M qui laisse fixe le point $A(1; 1; 1)$.

f) Quelle est l'image de l'origine par cette affinité ?

g) On appelle π le plan contenant le point A et les vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quelle est l'image de ce plan par l'affinité ?