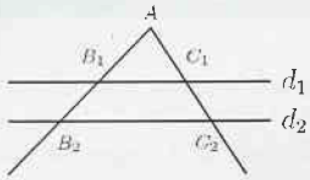
LDDR – Niveau 1 : Trigonométrie

1 Indiquer si les droites d_1 et d_2 sont parallèles ou non dans les cas suivants.



a) $AB_1 = 3,\ \ AC_1 = 2.4,\ \ AB_2 = 8,\ \ AC_2 = 6.4$

b) $AB_1 = 4,\ \ AC_1 = 6.5,\ \ B_1B_2 = 5,\ \ C_1C_2 = 3$

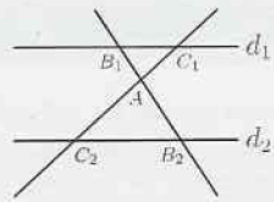
c) $AB_1 = 8,\ \ AC_1 = 12,\ \ B_1B_2 = 6,\ \ C_1C_2 = 9$

2 Trouver la valeur demandée de sorte que les droites d_1 et d_2 soient parallèles.

a) $AB_1 = 12,\ \ AC_1 = 9,\ \ C_1C_2 = 27\ \ /\ \ B_1B_2 = ?$

b) $AC_1 = 6,\ \ C_1C_2 = 15,\ \ B_1B_2 = 8\ \ /\ \ AB_2 = ?$

c) $AB_1 = 5,\ \ AB_2 = 12,\ \ C_1C_2 = 9.1\ \ /\ \ AC_1 = ?$



3 Indiquer la nature des triangles $T_1(3;4;5)$, $T_2(4;5;7)$, $T_3(\sqrt{2};\sqrt{2};2)$ et $T_4(3;3;3)$. Vérifier que toute paire de nombres entiers $x > y > 0$ définit un triangle rectangle $T(x^2 - y^2; 2xy; x^2 + y^2)$ à côtés entiers ("triplets de Pythagore").

4 Le triangle rectangle de cathètes 5.2 et 8.8 est-il semblable à celui dont les cathètes sont 30.8 et 18.2 ? Calculer l'hypoténuse de chacun de ces triangles.

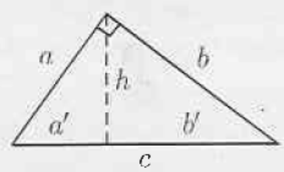
5 Avec la relation de Pythagore, trouver la hauteur et l'aire d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 1 unité.

6 Démontrer les relations suivantes, valables pour les triangles rectangles.

$h^2 = a'b'$ *Théorème de la hauteur*

$a^2 = a'c$ et $b^2 = b'c$ *Théorème d'Euclide*

$a^2 + b^2 = c^2$ *Théorème de Pythagore*

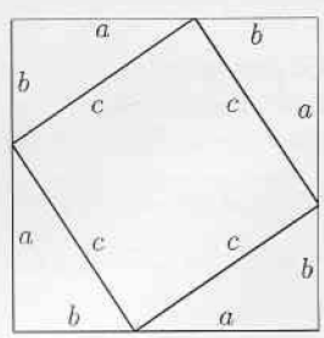


Aide : pour démontrer les deux premiers résultats, utiliser le théorème de Thalès. Le schéma ci-dessus présente trois triangles rectangles (à retournement près).

7 Reprenant les notations ci-dessus, calculer a', b' et h pour le triangle rectangle de cathètes $a = 3$ et $b = 4$.

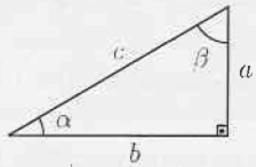
Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore, dont celle illustrée ci-contre. On construit un carré en disposant le même triangle rectangle dans chaque coin. L'aire de ce carré est égale à l'aire du petit carré intérieur et des quatre triangles réunis :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$\iff a^2 + b^2 = c^2$$



L

8 Déterminer les mesures des angles (α, β) et des côtés (a, b, c) qui manquent (approximations à deux décimales).



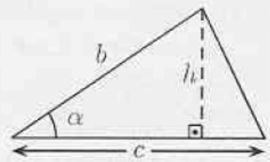
1. $\alpha = 45°$, $c = 4$
2. $\beta = 50°$, $c = 10$
3. $\alpha = 26°$, $a = 6$
4. $\alpha = 2\beta$, $a = 4$
5. $a = 5$, $b = 7$
6. $c = 3a$, $b = 8$

Les relations "sin-opp-hyp", "cos-adj-hyp" et "tan-opp-adj" permettent de déterminer avec le théorème de Pythagore toutes les caractéristiques (angles et côtés) d'un triangle rectangle dont on connaît la mesure de ... deux côtés / ... un côté et un angle aigu.

9 Déterminer la hauteur et l'aire des triangles suivants :

1. $b = 12$, $c = 14$, $\alpha = 30°$
2. $b = 17$, $c = 22$, $\alpha = 48°$

Trouver une formule générale pour l'aire d'un triangle quelconque (en fonction de α, b et c).



On retiendra la formulation suivante :

> L'aire d'un triangle est donnée par la moitié du produit de deux côtés, multipliée par le sinus de l'angle formé par ces côtés.

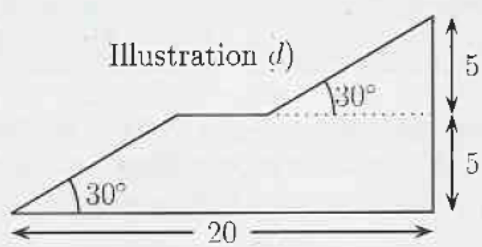
10 Résoudre les problèmes suivants après avoir établi un schéma indiquant clairement les valeurs données et la valeur cherchée (approximations à deux décimales).

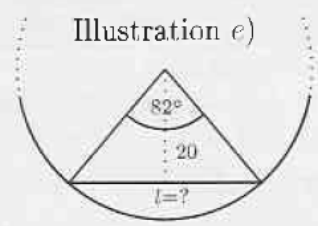
a) Couché sur le sol à 7 mètres d'un mât, un géomètre aperçoit ce mât sous un angle de $35°$. Calculer la hauteur du mât.

b) La tour Eiffel a une hauteur de 320m. Un touriste voit le monument sous un angle de $70°$. Calculer la distance à vol d'oiseau qui le sépare du pied de la tour.

c) Un bloc de pierre est poussé le long d'une rampe inclinée d'un angle de $9°$. Calculer sur quelle distance il doit être déplacé pour être dressé à une hauteur de 8 mètres.

d) Calculer l'aire et le périmètre du polygone représenté ci-dessous





e) Dans un cercle, une corde qui sous-tend un arc de $82°$ est à 20 centimètres du centre du cercle. Quelle est la longueur de cette corde ? [voir illustration ci-dessus]

f) Déterminer la hauteur d'une tour qui donne 36 mètres d'ombre lorsque le soleil est élevé de $37,5°$ au-dessus de l'horizon.

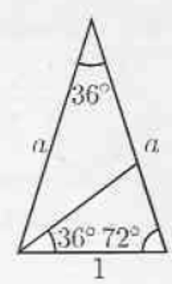
g) Calculer l'angle d'élévation du soleil sachant qu'une personne haute de $1,5$ m projette une ombre de $1,2$ m de long sur le sol.

h) On désire ériger une rampe de $7,2$ m de long qui atteigne une hauteur de $1,5$ m par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

i) La voûte d'un tunnel est un arc de cercle dont l'angle au centre vaut $220°$. Sachant que la largeur de la route est de 12 mètres, calculer le rayon de cet arc ainsi que la hauteur maximale de la voûte au-dessus de la route.

j) Un octogone régulier est inscrit dans un cercle de rayon $r = 5$. Calculer son périmètre et son aire.

k) Un 9-gone régulier a une aire de 120 cm^2. Trouver le rayon du cercle dans lequel il est inscrit ainsi que la longueur d'un de ses côtés.



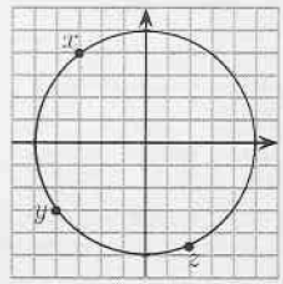
l) Vérifier que le schéma ci-contre présente trois triangles isocèles. Décomposer l'aire du grand triangle en somme de deux autres aires pour montrer que $a^2 = a + 1$, puis en déduire la valeur de a.

14 Sur un circuit circulaire de 60 m de rayon, un coureur avance à 18 km/h. Observé du centre, il parcourt un certain angle chaque seconde. Calculer sa vitesse angulaire en radians par seconde, degrés par seconde et tours par minute.

15 Indiquer le signe (+ ou −) de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ en fonction du quadrant dans lequel se trouve le point associé à l'angle x sur le cercle trigonométrique.

	0°	QI	90°	QII	180°	QIII	270°	QIV
$\sin(x)$								
$\cos(x)$								
$\tan(x)$								

16 Sur le cercle trigonométrique ci-contre sont représentés les points correspondant à des angles x, y et z.



a) Indiquer les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente de chacun de ces angles.

b) Donner une approximation à deux décimales de chacun de ces angles (avec la calculatrice).

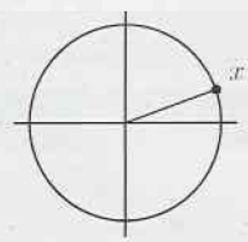
17 Résoudre les problèmes suivants à l'aide du théorème de Pythagore :

a) Calculer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ en sachant que $\alpha \in Q\text{III}$ et $\cos\alpha = -3/5$.

b) Calculer $\cos\beta$ et $\tan\beta$ en sachant que $\beta \in Q\text{II}$ et $\sin\beta = \sqrt{2}/3$.

c) Calculer $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ en sachant que $\gamma \in Q\text{IV}$ et $\tan\gamma = -4$.

18 Un angle x est exprimé en radians et fournit un point sur le cercle trigonométrique (voir ci-contre).



Placer les points associés aux angles $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$ puis compléter les identités suivantes en utilisant seulement $\pm\cos(x)$, $\pm\sin(x)$ et $\pm\tan(x)$.

(a)	$\cos(-x) = \ldots\ldots\ldots$	$\sin(-x) = \ldots\ldots\ldots$	$\tan(-x) = \ldots\ldots\ldots$
(b)	$\cos(\pi - x) = \ldots\ldots\ldots$	$\sin(\pi - x) = \ldots\ldots\ldots$	$\tan(\pi - x) = \ldots\ldots\ldots$
(c)	$\cos(\pi + x) = \ldots\ldots\ldots$	$\sin(\pi + x) = \ldots\ldots\ldots$	$\tan(\pi + x) = \ldots\ldots\ldots$

En raisonnant avec un triangle rectangle, montrer que

(d)	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

Ces relations sont parfois appelées *formules de symétrie horizontale* (a), *verticale* (b), *centrale* (c) et *diagonale* (d). Elles permettent de ramener l'évaluation des fonctions trigonométriques aux angles compris entre 0 et $\pi/4$ radians (c'est-à-dire entre 0° et 45°).

19 A l'aide des formules ci-dessus, trouver les valeurs exactes de $\sin(120°)$, $\cos(225°)$, $\tan(135°)$, $\sin(330°)$ et $\cos(150°)$.

20 Trouver les valeurs exactes de $\cos(75°)$, $\sin(75°)$ et $\tan(75°)$. Exprimer les résultats sous forme de fractions sans racine carrée au dénominateur.

21 Démontrer que $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ ne dépend pas de l'angle β.

22 On considère un angle α entre $90°$ et $180°$ tel que $\sin\alpha = 7/25$. Sans utiliser les touches trigonométriques de la calculatrice, trouver les valeurs exactes de $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\cos(\alpha-60°)$ et $\sin(\alpha+45°)$.

23 Démontrer les formules suivantes : $a)$ $\cos(3\alpha) = 4(\cos\alpha)^3 - 3\cos\alpha$
$b)$ $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3$

24 Se convaincre que pour $\alpha = 36°$, on a la relation $\sin(2\alpha) = \sin(3\alpha)$. En déduire que $x = \cos(36°)$ vérifie $4x^2 - 2x - 1 = 0$ et trouver la valeur exacte de x.

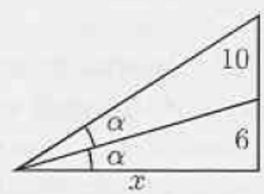
25 a) Démontrer la formule $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.
b) On considère $x = \cos(20°)$. Vérifier les valeurs suivantes :

$$\cos(40°) = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad \cos(60°) = 4x^3 - 3x$$
$$\cos(10°)\cos(30°) = \tfrac{1}{2}(2x^2 + x - 1) \quad \text{et} \quad \cos(50°)\cos(70°) = \tfrac{1}{4}(2x-1).$$

c) En déduire que le produit $\cos(10°)\cos(30°)\cos(50°)\cos(70°)$ vaut $3/16$.

26 Etablir la formule $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

27 Une statue de 10 mètres repose sur un socle de 6 mètres de haut. Un chat assis parterre voit le socle et la statue sous le même angle. Trouver la distance qui le sépare du socle. Facultatif : traiter le cas d'une statue de hauteur a et d'un socle de hauteur b.



28 Trouver tous les angles x (en degrés) qui vérifient
a) $\cos x = 0.2$ b) $\sin x = -0.4$ c) $\cos x = -0.6$ d) $\tan x = -5$

29 Résoudre les équations suivantes (pour les trois premières équations, indiquer toutes les solutions entre $0°$ et $360°$).

a) $\cos(2x) = 0.2$ b) $\sin(2x+30°) = -0.6$ c) $\tan(3x-10°) = -2$
d) $\sin(4x+10°) = 0.4$ e) $\cos(3x-20°) = -0.2$ f) $\tan(5x+30°) = 3$

Une *équation trigonométrique* en une variable x (par exemple) est une équation dans laquelle apparaît une ou plusieurs fonctions trigonométriques dépendantes de x. Pour résoudre une telle équation (i.e. chercher toutes les valeurs de x qui la satisfont), on recherche une équation équivalente qui ne fait intervenir qu'un seul type de fonction.

$\boxed{30}$ Résoudre les équations suivantes (angles x en degrés) après avoir utilisé certaines relations trigonométriques pour les simplifier.

a) $\sin x = 3\cos x$ b) $3\cos x + 4\sin x = 0$ c) $2(\sin x)^2 = \cos x + 1$

d) $(\sin x - \cos x)^2 = 0.5$ e) $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0.2$

$\boxed{31}$ Résoudre les équations suivantes (solutions exactes en radians entre 0 et 2π).

a) $2\sin(x) - 1 = 0$ b) $(\sin x)^2 + 2\sin(x) - 3 = 0$ c) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

d) $4\cos(x) = \frac{3}{\cos(x)}$ e) $\sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

Combinaison de sinus et de cosinus. On a la "formule des physiciens"

$$a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi) = A\sin\left(x - (\varphi - \frac{\pi}{2})\right)$$

avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{A}$, $\sin\varphi = \frac{b}{A}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

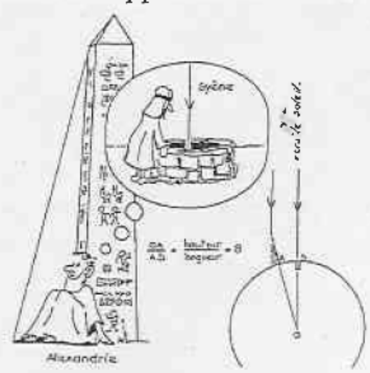
$\boxed{32}$ Mettre les expressions suivantes sous les formes $A\cos(x - \varphi)$ et $A\sin(x - \varphi')$ avec des nombres positifs A et des angles φ, φ' minimaux (en degrés).
a) $4\cos x + 3\sin x$ b) $2\cos x - 3\sin x$ c) $5\sin x - 12\cos x$

$\boxed{33}$ Résoudre l'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0.5$ de deux manières :

a) en utilisant la relation de Pythagore : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$,

b) après avoir exprimé $\sin(x) + \cos(x)$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

Histoire : Approximation du rayon de la terre (Eratosthène, $\sim$ 220 av. J.-C.)



A Syène (près d'Assouan), le jour du solstice d'été, à midi, le soleil éclaire complètement le fond d'un puits. A cet instant précis, Eratosthène mesure l'ombre d'un obélisque à Alexandrie : elle vaut 1/8 de la hauteur du monument, ce qui indique un angle au centre $\alpha \cong 7,12°$. Les deux villes étant distantes de 788 km, on peut alors estimer la circonférence de la terre par $\frac{360}{7,12} \cdot 788 \cong 39843$ km, et le rayon terrestre $R \cong \frac{39843}{2\pi} \cong 6341$ km.