LDDR – Niveau I : Géométrie 3D

Exercice 1. *Soient les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminez les vecteurs $\vec{c} = -5\vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ *et* $\vec{e}$ *tel que* $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{e} = \vec{0}$.

Exercice 2. *Déterminez les nombres m, n, p et q pour que les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ m \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} n \\ 9,6 \\ p \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ q \\ -15 \end{pmatrix}$ *soient parallèles.*

Exercice 3. *Soient les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}$.

a) Démontrez que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants pour $z = 10$.

b) Déterminez la valeur de z pour que ces trois vecteurs soient linéairement dépendants, puis exprimez l'un comme combinaison linéaire des deux autres ?

Exercice 4. *Les vecteurs* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *suivants forment-ils une base de* V_3 *?*

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.   *b)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Complétez le tableau ci-dessous.*

A	$(1; -2; 5)$	$(-5; \frac{1}{2}; 6)$	$(\;;\;;\;)$	$(0; -1; 6)$	$(4; \;; \frac{1}{4})$
B	$(\;;\;;\;)$	$(4; 1; \frac{1}{3})$	$(6; 2; -4)$	$(\;; 3;\;)$	$(\;; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

* **Exercice 6.** *Soient les points* $A(-5; 12; 9)$, $B(11; -4; 3)$ *et* $C(4; 4; 12)$.

a) Déterminez les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

b) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

c) Déterminez les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ *et* $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

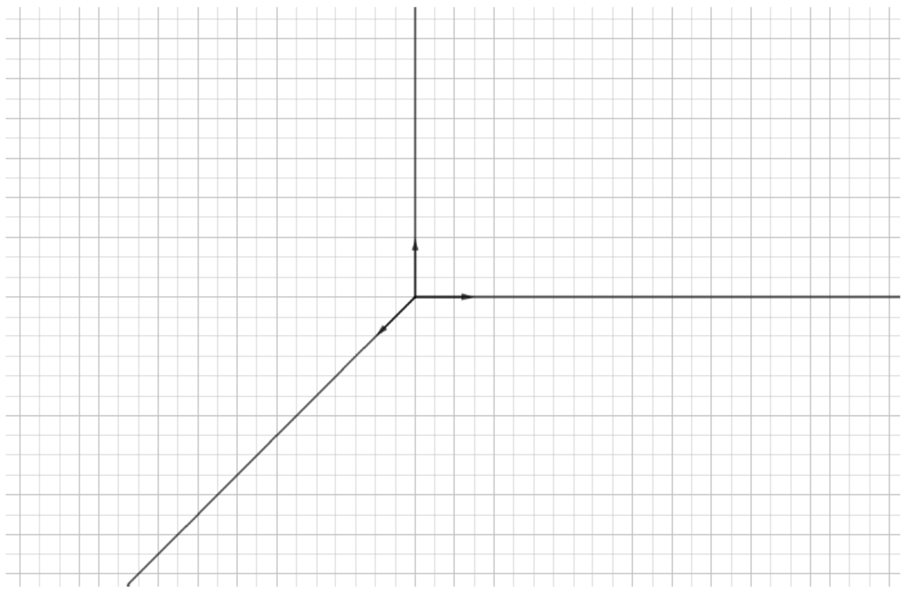
d) Déterminez les coordonnées du point M milieu du segment AB.

Exercice 7. *Soient les points* $A(4;0;0)$, $M(2;3;1)$ *et* $D(0;0;3)$.

a) Dessinez, dans le repère ci-dessous, les trois points et montrez par calcul, qu'ils ne sont pas alignés.

b) Calculez les coordonnées des points B *et* C *choisis pour que* $ABCD$ *soit un parallélogramme et que* M *soit le milieu de* AB.

c) Trouver les coordonnées du centre du parallélogramme.



Exercice 8. *Estimez les coordonnées des points* A, B, C, D *et* E *en sachant que :*

- ⋆ *le point* A *est dans le mur*

  $A(\quad;\quad;\quad)$

- ⋆ *l'abscisse de* B *vaut 1*

  $B(\quad;\quad;\quad)$

- ⋆ *l'ordonnée de* C *vaut 3*

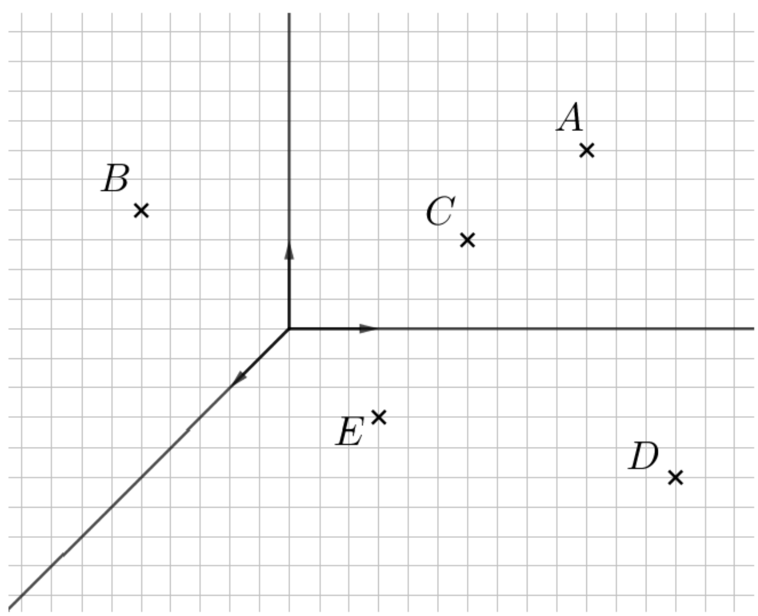
  $C(\quad;\quad;\quad)$

- ⋆ *la cote de* D *vaut -3*

  $D(\quad;\quad;\quad)$

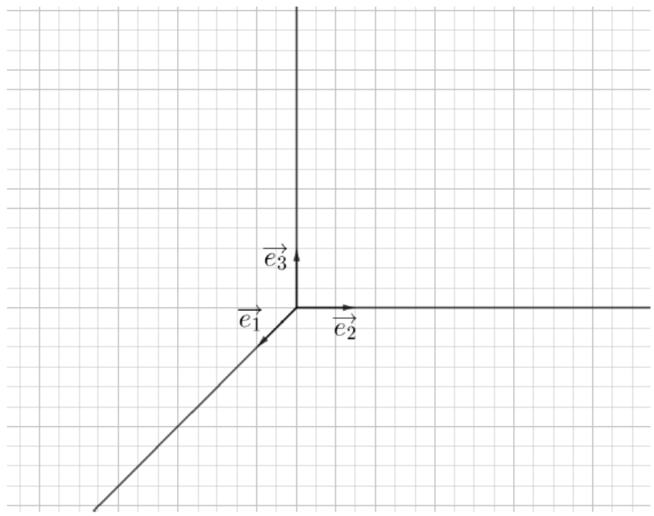
- ⋆ *l'abscisse et l'ordonnée du point* E *sont égales*

  $E(\quad;\quad;\quad)$



Exercice 9. *a) Représentez les points $A(0;3;2)$ et $B(4;-1;4)$ ainsi que leurs projections orthogonales A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 dans le repère ci-dessous.*

b) Déterminez le milieu M du segment AB puis représentez-le dans le repère.



****Exercice 10.** *Placez les points $A(1;2;3)$, $B(-4;0;2)$, $C(2;5;0)$ et $D(3;-2;4)$ dans le repère usuel, ainsi que leurs projections sur les plans de référence.*

Exercice 11. *a) À quelle condition deux points A et B ont-ils la même projection sur le sol ? sur le mur ? sur la paroi ?*

b) À quelle condition les points $A(a;b;0)$ et $B(0;c;d)$ sont-ils les projections respectives sur le sol et le mur d'un même point P ?

Exercice 12. *Donnez une équation paramétrique vectorielle et des équations paramétriques algébriques de la droite d passant par le point $A(4;-5;0)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.*

Exercice 13. *Déterminez une représentation paramétrique de la droite d passant par les points $A(9;-1;11)$ et $B(14;-6;1)$. Donnez ensuite les coordonnées des points C, D et E de la droite d d'abscisse nulle, d'éloignement nul et de cote nulle.*

Exercice 14. *Donnez des équations paramétriques des axes Ox, Oy et Oz.*

Exercice 15. *Soit la droite d dont des équations paramétriques sont données par*

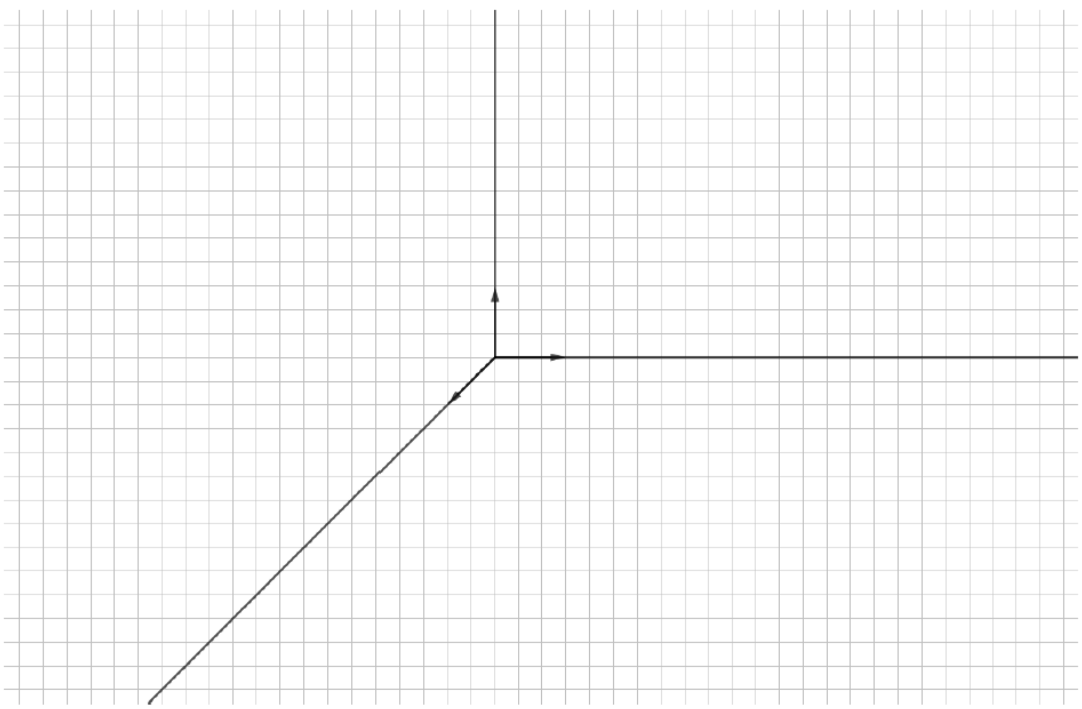
$$\Rightarrow d : \begin{cases} x &= 2-5\lambda \\ y &= -1+\lambda \\ z &= 3\lambda \end{cases}$$

Déterminez le point de d...

1. *...qui a une abscisse égale à 12.*
2. *...qui a un éloignement égal à 5.*
3. *...qui a une cote égale à -2.*
4. *...dont l'abscisse et la cote sont égales.*
5. *...dont la cote est égale au double de l'éloignement.*

Exercice 16. *a) Placez les points $A(2;1;3)$ et $B(3;4;2)$ dans le repère ci-dessous ainsi que leur projection dans le sol A_1 et B_1.*

b) Soit d la droite passant par A et B. Déterminez par dessin les points d'intersections T', T'' et T''' de d avec le sol, le mur et la paroi.



Exercice 17. *A l'aide d'une représentation paramétrique de d, déterminez par calcul les points T', T'' et T''' de l'exercice précédent.*

Exercice 18. *Soient les quatre droites d, p, f et h données par un point et un vecteur :*

$$d : D(6;3;2),\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad p : P(4;3;1),\ \vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f : F(4;2;1),\ \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h : H(4;1;3),\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'elles, calculez ses traces dans les plans de références avant de la représenter dans un repère muni de ses projections dans les plans de références (4 dessins différents).

* **Exercice 19.** *Même exercice avec les droites données par :*

a) $A(1;2;2)$, $\vec{d} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ *b)* $A(2;1;0)$, $\vec{d} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$

c) $A(3;0;4)$, $\vec{d} = \overrightarrow{e_1}$ *d)* $A(2;1;3)$, $\vec{d} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$

Exercice 20. *Est-il vrai que la droite d donnée ci-dessous coupe l'axe Oy ?*

$$d : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

Exercice 21. *Soient les cinq droites suivantes :*

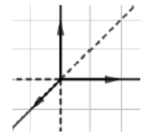
$$a : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad b : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases} \qquad c : \begin{cases} x = -\nu \\ y = 4 + 3\nu \\ z = 5 + \nu \end{cases}$$

$$d : \begin{cases} x = 4 + \zeta \\ y = 2\zeta \\ z = 3 - 2\zeta \end{cases} \qquad e : \begin{cases} x = 2\xi \\ y = -1 + 4\xi \\ z = 6 - 4\xi \end{cases}$$

Déterminez la position relative de a et b, a et c, a et d ainsi que a et e.

Exercice 22. *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez par dessin la position relative des droites a et b. Puis vérifiez vos résultats par calcul en indiquant le point d'intersection I lorsqu'elles sont sécantes.*

Pour le dessin, utilisez le repère ci-contre.



a) $a : A(1;2;3)$ *et* $B(2;4;6)$, $b : C(2;1;-1)$ *et* $D(0;3;7)$.

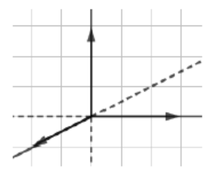
b) $a : A(2;2;3)$ *et* $B(1;3;5)$, $b : C(1;4;2)$ *et* $D(3;2;-2)$.

c) $a : A(1;0;1)$ *et* $B(3;-1;3)$, $b : C(-1;1;1)$ *et* $D(3;1;-3)$.

d) $a : A(-1;4;0)$ *et* $B(3;2;1)$, $b : C(-5;6;-1)$ *et* $D(7;0;2)$.

***Exercice 23.**

Même exercice. Pour le dessin, utilisez cette fois le repère ci-contre. Donnez à la feuille l'orientation « paysage » pour la question a) et e), et l'orientation « portrait » pour la question c).



a) $A(6;3;0), B(4;5;2) \in a$, $C(0;0;4), D(1;1;3) \in b$.

b) $A(-3;-1;2), B(-1;0;1) \in a$, $C(4;-1;0), D(8;1;-2) \in b$.

c) $A(2;4;1), B(6;6;1) \in a$, $C(4;3;5), D(6;5;3) \in b$.

d) $A(2;-1;-3), B(6;1;-5) \in a$, $C(4;0;-4), D(10;3;-7) \in b$.

e) $A(4;2;4), B(1;8;-2) \in a$, $C(2;2;3) \in b$ *de vecteur directeur* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24. *Déterminez l'équation cartésienne d'un plan :*

a) parallèle au sol *b) parallèle au mur* *c) parallèle à la paroi*

d) parallèle à l'axe Ox *e) parallèle à l'axe Oy* *f) parallèle à l'axe Oz.*

Exercice 25. *Soit le plan* $\Phi : x - 2y + 3z - 4 = 0$.

a) Déterminez si les points $A(3;-\frac{1}{2};1)$ *et* $B(1;0;1)$ *appartiennent à* Φ.

b) Calculez les coordonnées de deux autres points C et D appartenant à Φ.

Exercice 26. *Déterminez l'équation cartésienne des plans...*

a) ...π passant par $A(4;1;2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \overrightarrow{e_3}$.

b) ...σ passant par les points $A(5;0,0)$, $B(0;1;1)$ et $C(4;2;2)$.

c) ...ρ contenant les deux droites : $d : A(2;0;3), \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $g : B(4;0;0), \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) ...θ contenant les deux droites : $e : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 - 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ *et* $h : \begin{cases} x = 4 - 3\mu \\ y = 9 - \mu \\ z = -7 + 4\mu \end{cases}$.

e) ...ϕ contenant le point $A(0;2;-3)$ et parallèle au plan $\phi_2 : 2x + 3y - 7z - 6 = 0$.

Exercice 27. *Dessinez les traces des plans $\alpha : 3x - 3y + 4z - 12 = 0$, $\beta : 2y + 5z - 10 = 0$ et $\gamma : x - z - 5 = 0$, $\delta : z - 4 = 0$ et $\epsilon : x - 5 = 0$ dans des repères différents.*

Exercice 28. *Soient les plans* $\pi : \left\{ A(0;2;0), \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

et $\rho : \{B(2;3;5), C(1;0;5), D(6;-2;5)\}$.

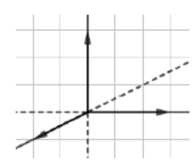
a) Déterminez une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de chaque plan.

b) Représentez ces plans dans des repères différents.

Exercice 29.

a) Donnez une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne du plan π passant par les points $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;-3)$.

b) Dessinez le plan π ainsi que la droite d incluse dans π formée des points à hauteur $z = 2$, en utilisant le repère ci-contre, avec la page en orientation paysage.



c) Donnez une représentation paramétrique de cette droite.

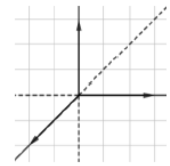
d) Le plan β passe par les points $D(6;-2;0)$ et $E(0;1;-3)$, sa trace dans le sol est parallèle à celle de α. Dessinez les traces du plan β dans le même repère que le plan π.

Aide : remarquez que le point D est un point du sol et de β, et le point E est un point du mur et de β.

e) Déterminez une équation cartésienne du plan β.

Exercice 30. *Soient les droites d passant par $A(2;3;3)$, de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et e parallèle à d passant par $E(4;4;0)$.*

a) Dessinez les traces du plan π qui contient d et e, en utilisant le repère ci-contre, avec la page en orientation paysage.



b) Donnez une équation cartésienne du plan π.

Aide pour a) : Commencez par dessiner d, e, d_1 et e_1 puis déterminez leurs traces dans les plans de référence.

Exercice 31. *Déterminez la position relative du plan π et de la droite d dans chacun des cas suivants, en indiquant les coordonnées du point d'intersection s'il existe :*

a) $\pi : x + 2y + 2z - 6 = 0, \quad d : \begin{cases} x &= 2 - 2\lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 2\lambda \end{cases}$

b) $\pi : x + 2y - z - 3 = 0, \quad d : \{A(5;1;2); B(-1;2;0)\}$

c) $\pi : 3x + 5y + z - 5 = 0, \quad d : \begin{cases} x &= 1 + 5\nu \\ y &= 1 - 3\nu \\ z &= 3 \end{cases}$

**d)* $\pi : 2x + y - z - 6 = 0$, *d passant par $A(1;5;4)$ et parallèle au vecteur $\vec{t} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$.*

Exercice 32. *Soit le plan $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$. Déterminez la position de π relativement aux droites suivantes :*

**a) d donnée par $A(2;1;-2)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

**b) h donnée par $D(1;2;2)$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.*

c) g passant par $B(2;-5;-1)$ et $C(3;-6;-2)$.

Exercice 33. *Soient les points $A(1;2;6)$, $B(5;7;4)$, $C(2;3;5)$, $D(4;6;1)$ et $E(3;4;2)$. Calculez le point d'intersection de la droite AB avec le plan CDE.*

Exercice 34. *Déterminez la projection du point $P(1;-1;2)$ sur le plan $\pi : 2x + y - z - 4 = 0$ parallèlement à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 35. *Soient les points* $A(8;8;0)$, $B(12;16;0)$ *et* $S(0;16;14)$, *ainsi que le plan* α *d'équation* $x = 5$.

a) Déterminez les coordonnées des points d'intersection respectifs A' *et* B' *des droites* SA *et* SB *avec le plan* α.

b) Montrez que les droites AB *et* $A'B'$ *se coupent en un point* P. *Calculez les coordonnées de ce point.*

Exercice 36. *Représentez graphiquement la droite d'intersection des plans suivants, puis déterminez une représentation paramétrique de cette droite :*

a) $\alpha : x - 2y - 2z + 4 = 0$ *et* $\beta : 2y + 3z - 12 = 0$.

**b)* $\gamma : -2x + 4y + z - 6 = 0$ *et* $\sigma : 5x + 4y + 5z - 20 = 0$.

c) $\theta : z - 3 = 0$ *et* $\phi : 2x + y + 2z - 10 = 0$.

Exercice 37. *Dans chacun des cas suivants, déterminez si les plans* $\pi : 3x - 2y + 5z = 4$ *et* σ *sont sécants, parallèles ou confondus :*

a) $\sigma : 3x + 2y + 5z = 4$

b) $\sigma : 6x - 4y + 10z = 4$

c) $\sigma : -15x + 10y - 25z = -20$

Exercice 38. *Soient les plans* $\alpha : 3x - y + 9z + 4 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$ *et* $\gamma : x + 2y - 4z - 1 = 0$.

Montrez que ces trois plans se coupent selon une droite et donnez une représentation paramétrique algébrique de cette droite.

Exercice 39. *Déterminez, s'il existe, les coordonnées du point appartenant aux trois plans :*

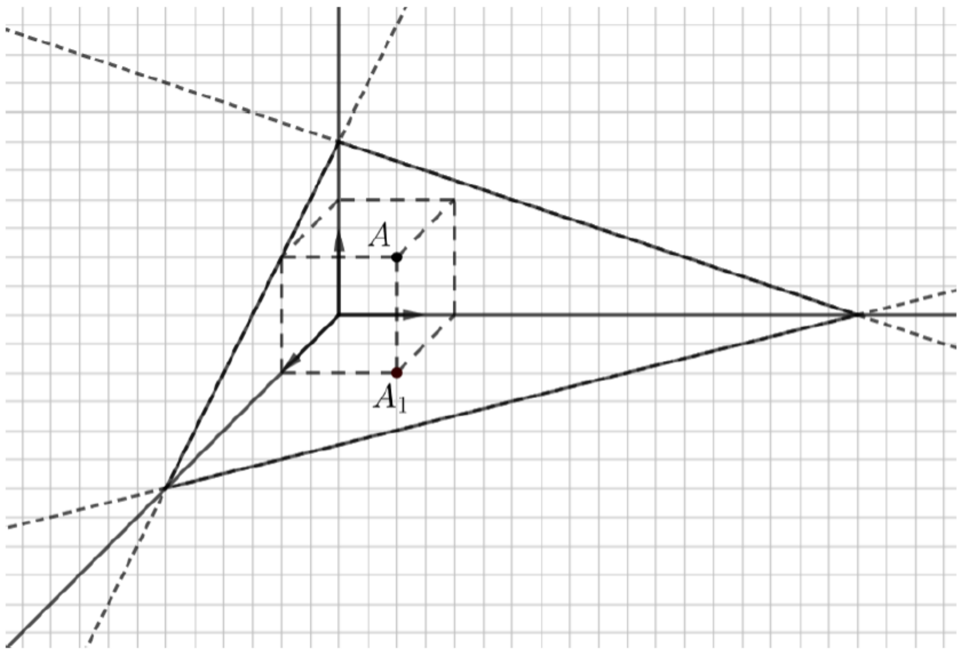
$$\pi : x + 2y - 3z = -6 \qquad \sigma : 2x + 4y - z = 18 \qquad \rho : 3x - 2y + z = 2$$

Exercice 40. *Déterminez des équations paramétriques d'une droite* d *passant par* $A(2;3;5)$ *et parallèle aux deux plans* $\pi : 3x - y + z = 0$ *et* $\rho : x - y + z = 0$.

Exercice 41.

a) Déterminez par dessin le point P du plan π qui a sur le sol la même projection que A et en déduire que A est situé au-dessus du plan.

b) Dessinez les traces du plan sur le parallélipipède associé au point A.



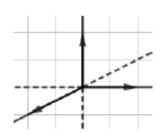
Exercice 42. *Soient le plan $\alpha : 3x + 2y + 3z - 24 = 0$ et la droite d passant par $A(1;6;6)$ et $B(3;0;2)$. Considérons encore le plan vertical β contenant la droite d.*

a) Déterminez la position relative de α et d, en calculant, le cas échéant, les coordonnées du point d'intersection.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan β.

c) Déterminez une représentation paramétrique algébrique de la droite d'intersection des deux plans.

d) Dessinez les traces des deux plans ainsi que les deux droites, en prenant le repère ci-contre avec la page en orientation paysage.



e) Déterminez graphiquement les coordonnées du point d'intersection des deux droites et commentez le résultat.

*__Exercice 43.__ *Soient le plan $\pi : 2x+3y+6z-18=0$ et la droite* $d : \begin{cases} x &= 5-2\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$.

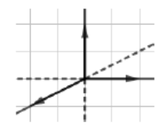
a) Dessinez π, d ainsi que le plan vertical α qui contient la droite d. À l'aide du plan α, construire le point d'intersection I de π et de d.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan α.

c) Calculez les coordonnées du point I.

*__Exercice 44.__ *Soit a la droite donnée par le point $A(2;3;3)$ et le vecteur directeur $\vec{t} = 2\vec{e_1} - 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$. Et soit b la droite parallèle à a passant par $B(4;4;0)$.*

a) Dessinez les droites a et b ainsi que leurs projections sur le sol, en prenant le repère ci-contre avec la page en orientation paysage.



b) Dessinez les traces et déterminez une équation cartésienne du plan vertical α contenant la droite a.

c) Dessinez les traces du plan β contenant les droites a et b.

Exercice 45. *a) Calculez la norme du vecteur* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

b) Calculez la distance entre les points $A(-2;0;-7)$ et $B(1;3;-1)$.

c) Calculez la longueur du segment AB, avec $A(0;3;2)$ et $B(4;-1;4)$.

Exercice 46. *a) Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont unitaires ?*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Donnez un vecteur unitaire ayant même direction que le vecteur $\vec{e} = \begin{pmatrix} -44 \\ 33 \\ -48 \end{pmatrix}$.

c) Donnez les composantes d'un vecteur de norme 5 ayant même direction que le vecteur $\vec{f} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) Donnez un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{b}$.

e) Donnez un vecteur de norme 3, orthogonal au vecteur $\vec{d}$.

Exercice 47. *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Calculez* $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c}$ *et* $\overrightarrow{a}^2$.

Exercice 48. *Le triangle de sommets* $A(-2;0;-4)$, $B(0;11;3)$ *et* $C(1;12;-7)$ *est-il rectangle en* A *?*

Exercice 49. *Le triangle* ABC, *avec* $A(x;-1;0)$, $B(8;3;-2)$ *et* $C(7;-2;1)$ *est rectangle en* A. *Que vaut* x *?*

Exercice 50. *Soient les vecteurs* $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$ *et* $\vec{b} = 2\overrightarrow{e_1} + 7\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ *dans la base orthonormée* $\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\}$.

Calculez l'angle formé par ces vecteurs.

Exercice 51. *Soit la droite* $d : \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases}$.

Déterminez une droite g *perpendiculaire à* d.

Exercice 52. *a) Déterminez une équation du plan* π *orthogonal au vecteur* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et contenant le point* $P(1;1;3)$.

b) Déterminez une équation du plan σ *contenant le point* $S(-2;1;-5)$ *et perpendiculaire à la droite* $d : \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Exercice 53. *Déterminez la droite* d *passant par le point* $A(2;3;5)$ *et perpendiculaire au plan* π *d'équation cartésienne* $3x-2y+z+5=0$.

Exercice 54. *Déterminez une équation cartésienne du plan* π *passant par le point* $A(3;1;1)$ *et perpendiculaire à la droite* d *passant par* $B(1;0;5)$ *et* $C(3;-3;8)$.

Exercice 55. *Déterminez une équation cartésienne du plan* π *passant par l'origine et le point* $A(1;1;1)$ *et qui est perpendiculaire au plan d'équation* $x-y+z+2=0$.

Exercice 56. *Déterminez l'équation cartésienne du plan médiateur du segment* AB *avec* $A(2;-1;4)$ *et* $B(1;3;2)$.

Exercice 57. *Soient les points* $A(5;1;4)$ *et* $B(7;7;2)$. *Déterminez une équation du plan* π *qui coupe le segment* AB *à angle droit en son point milieu.*

Exercice 58. *Soient les points* $A(1;1;0)$, $B(5;7;4)$ *et la droite* $d : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$.

Déterminez le point C *de* d *tel que le triangle* ABC *soit isocèle en* C.

Exercice 59. *Calculez la distance du point* $A(15;-2;5)$ *au plan* $\pi : 3x - 2y + z = 12$.

Exercice 60. *Soient les deux plans* $\alpha : 3x + 12y - 4z - 18 = 0$ *et* $\beta : 3x + 12y - 4z + 73 = 0$.

Vérifiez qu'ils sont parallèles, puis calculez la distance qui les sépare.

Exercice 61. *Soit le plan* π *passant par l'origine orthogonalement au vecteur* $\vec{n} = 2\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Calculez la distance de $P(1;0;3)$ *et* $Q(-2;3;5)$ *au plan* π.

Exercice 62. *Soient le plan* $\pi : x - 2y + 3z + 20 = 0$ *et le point* $A(-1;3;5)$.

a) Calculez les coordonnées du point B *qui est la projection orthogonale de* A *sur le plan* π.

b) Calculez la plus courte distance entre le plan π *et le point* A.

c) Déterminez le point S_A *symétrique de* A *par rapport à* π *(Symétrie planaire).*

Exercice 63. *Soit la droite* $d : \begin{cases} x &= 2 + \lambda \\ y &= -7 + 2\lambda \\ z &= -2 + \lambda \end{cases}$ *et le point* $A(4,2;-4)$.

a) Déterminez le point P *de la droite qui est le plus proche du point* A.

b) Déterminez le symétrique de A *par rapport à d (Symétrie axiale).*

Exercice 64. *Soit le plan* π *passant par l'origine et orthogonal à* $\vec{n} = 6\overrightarrow{e_1} - 7\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}$.

a) Calculez la distance de π *aux points* $A(1;0;3)$, $B(-2;3;5)$ *et* $C(4;-1;0)$.

b) Calculez la valeur de chacun des angles du triangle ABC.

Exercice 65. *Déterminez les équations cartésiennes des plans orthogonaux à*

$$\vec{n} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 12\overrightarrow{e_3}$$

et dont la distance jusqu'au point $P(-6;2;1)$ *vaut 2.*

Exercice 66. *Soit le plan* $\pi : 7x - 24z + 11 = 0$.

a) Déterminez les équations cartésiennes des plans se trouvant à la distance 3 de π.

b) Déterminez le point P *de* π *qui est le plus proche de l'origine* $O(0;0;0)$. *Combien vaut la distance entre ce point et l'origine ?*

Exercice 67. *Déterminez les équations des plans bissecteurs des deux plans suivants :*

$$\pi_1 : 2x - y - 2z - 13 = 0 \quad \textit{et} \quad \pi_2 : 4x - 7y - 4z - 5 = 0$$

***Exercice 68.** *Soit le tétraèdre de sommets* $A(2;4;6)$, $B(-4;-4;4)$, $C(5;0;3)$ *et* $D(-1;7;5)$. *Calculez la longueur de la hauteur, issue de* A, *de ce tétraèdre.*

***Exercice 69.** *Soient le point* $A(9;9;5)$ *et la droite* $d : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4+\lambda \\ y & = & 7-2\lambda \\ z & = & 1+2\lambda \end{array} \right.$.

Déterminez deux points B *et* C *de* d *tels que* ABC *soit un triangle rectangle d'hypothénuse* AC, *la longueur du côté* BC *étant égale à 10.*

***Exercice 70.**

a) Déterminez la projection orthogonale P' *du point* $P(8;8;3)$ *sur le plan*

$$\pi : 3x - y - z + 9 = 0$$

b) Quelle est la plus courte distance de P *à* π *?*

c) Déterminez le symétrique S *de* P *par rapport à* π.

Exercice 71. *Calculez la mesure de l'angle aigu que forment les deux droites d_1 et d_2 dans chacun des cas suivants.*

1.
$$d_1 : \begin{cases} x &= 17-k \\ y &= 4-2k \\ z &= 13+2k \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= -13+4t \\ y &= 7+7t \\ z &= -5-4t \end{cases} ;$$

2.
$$d_1 : \begin{cases} x &= -8+3k \\ y &= 13 \\ z &= -6-4k \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 6-8t \\ y &= 12+t \\ z &= -8-6t \end{cases} ;$$

3.
$$d_1 : \begin{cases} x &= -3+\lambda \\ y &= 8+6\lambda \\ z &= 16+2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 2+3\mu \\ y &= \mu \\ z &= -4-\mu \end{cases} .$$

Exercice 72. *La droite a est donnée par les points $A(3;0;5)$ et $B(-1;2;7)$. La droite b est donnée par les points $C(-6;4;2)$ et $D(5;4;3)$. Calculez la valeur de l'angle aigu et de l'angle obtu déterminé par ces deux droites.*

Exercice 73. *Soit le triangle de sommets $A(4;1;7)$, $B(2;4;3)$ et $C(3;9;5)$. Calculez les trois angles de ce triangle.*

Exercice 74. *Soient les plans $\alpha : 2x-3y+4z+4=0$ et $\beta : -3x+y+2z=0$. Calculez la valeur de l'angle aigu déterminé par ces deux plans.*

Exercice 75. *Déterminez l'angle aigu entre les plans α et β suivants.*

a) $\alpha : x-y+5=0$ $\qquad$ $\beta : x+2y+3z=0$

b) $\alpha : 3x+y+z+5=0$ $\qquad$ $\beta : -5x+2y+3z=0$

c) $\alpha : x+2y-z=0$ $\qquad$ $\beta : 2x-3y+4z=8$

Exercice 76. *Que vaut l'angle entre le plan π et la droite d suivants ?*

$$\pi : x-y+5=0 \qquad d : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases}$$

Exercice 77.

a) Soient le plan $\pi : x+3y-7z+1=0$ ainsi que les points $A(5;0;4)$ et $B(-6;1;3)$. Calculez la valeur de l'angle aigu sous lequel la droite AB coupe le plan π.

b) Idem avec le plan $\alpha : 3x+2y-5z=0$ et les points $C(1;2;3)$ et $B(2;1;5)$.

Exercice 78. *Déterminez l'angle aigu entre la droite* $d : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$ *et le mur.*

Exercice 79. *A partir de la définition du produit vectoriel et de celle de la base usuelle* $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$*, complétez :*

$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}=$ $\qquad$ $\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3}=$ $\qquad$ $\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3}=$

$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_1}=$ $\qquad$ $\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_2}=$ $\qquad$ $\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_3}=$

Exercice 80. *A partir des propriétés du produit vectoriel et des résultats de l'exercice précédent, calculez :*

1) $3\overrightarrow{e_1}\wedge 2\overrightarrow{e_2}$ $\qquad$ 2) $-\overrightarrow{e_2}\wedge 3\overrightarrow{e_3}$ $\qquad$ 3) $\overrightarrow{e_1}\wedge(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3})$

4) $5\overrightarrow{e_2}\wedge(3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_3})$ $\qquad$ *5) $(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}-4\overrightarrow{e_3})\wedge 2\overrightarrow{e_1}$ $\qquad$ *6) $(-3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\wedge(2\overrightarrow{e_1}+6\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3})$

Puis calculez les vecteurs suivants :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\quad {}^*\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Exercice 81. *Soient les vecteurs* $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$.

Calculez les produits vectoriels $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{b}\wedge\vec{a}$, $\vec{a}\wedge\vec{c}$, $\vec{b}\wedge\vec{c}$, $\vec{a}\wedge\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_1\wedge\vec{b}$.

Exercice 82. *Donnez une équation cartésienne du plan* π *passant par* $A(2;1;8)$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 83. *Déterminez l'aire du parallélogramme* $OABC$ *où* $A(2;\frac{7}{2};-1)$ *et* $B(3;8;-5)$.

Exercice 84. *Soient les points* $A(2;1;1)$, $B(5;2;3)$ *et* $C(4;4;6)$.

a) Donnez une équation cartésienne du plan π *contenant ces trois points.*

b) Déterminez l'aire du triangle ABC.

*__Exercice 85.__ *Soient les points* $A(3;0;0)$, $B(0;5;0)$ *et* $C(0;0;8)$.

Déterminez le volume du tétraèdre $OABC$*. Aide : déterminez d'abord une équation cartésienne du plan* π *contenant* A, B *et* C*, puis calculez la distance de* O *à* π.

*__Exercice 86.__ *Soient* A, B *et* C *les points d'intersection du plan* $\pi : 3x+4y+6z-24=0$ *et des axes de référence.*

a) Dessinez le tétraèdre $OABC$ *et calculez son volume.*

b) Calculez l'aire du triangle ABC.

Exercice 87. *Soient les points* $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ *et* $C(2;1;0)$.

a) Calculez l'aire du triangle ABC.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan π *contenant ce triangle.*

c) Déterminez des équations paramétriques de la droite d, incluse dans le plan π *et médiatrice du segment* BC.

Exercice 88. *Soient les points* $A(1;2;0)$, $B(6;2;5)$, $C(3;-2;0)$ *et* $D(-2;-2;-5)$.

a) Vérifiez que ces points appartiennent à un même plan π *et donnez une équation cartésienne de ce plan. Dessinez également les traces de* π *dans les trois plans de référence.*

b) Calculez les coordonnées du point d'intersection des droites AC *et* BD.

c) Prouvez que le quadrilatère $ABCD$ *est un losange et calculez la valeur de ses angles ainsi que son aire.*

d) Calculez la valeur de l'angle aigu déterminé par la droite BD *et le sol.*

e) Déterminez une équation cartésienne du plan qui coupe perpendiculairement le plan π *selon la droite* AC.

Exercice 89.

a) Calculez la distance du point $P(5;8;11)$ *à la droite* $d : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

b) Idem avec le point $A(-5;4;-2)$ *et la droite* $d_2 : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

Exercice 90. *Soit la droite d passant par les points* $A(2;2;-5)$ *et* $B(4;-1;-4)$. *À quelle distance de d se situent les points* $D(1;1;1)$ *et* $E(6;-4;-3)$ *?*

Exercice 91. *Soit la droite d passant par les points* $A(2;3;5)$ *et* $B(1;2;8)$.

Déterminez le point E *de la droite d situé à égale distance de* $C(5;4;8)$ *et* $D(9;-2;6)$.

Exercice 92. *Soit la pyramide* $SOAB$ *de sommet* $S(0;0;8)$ *et de base* OAB *avec* $A(6;0;0)$ *et* $B(0;4;0)$. *Nous coupons cette pyramide par le plan* π *d'équation* $2x + 3y + 3z - 18 = 0$.

a) Dessinez la section de la pyramide par le plan et calculez son aire.

b) Calculez la distance de la droite AB *à chaque sommet de la section.*

Exercice 93. *Soient les plans* $\alpha : x + y - z - 8 = 0$ *et* $\beta : 2x - 3y + z - 11 = 0$.

a) En employant un produit vectoriel, déterminez un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.

b) Déterminez la trace dans le sol de cette droite d'intersection.

c) Calculez la distance de cette droite au point $A(4; ...; ...)$, *sachant que ce point est situé dans le plan* β *et dans le sol.*

Exercice 94. *Soient les points* $A(1; 5; 3)$, $B(5; 3; 7)$ *et* $C(9; 1; 2)$.

Déterminez les équations paramétriques de la bissectrice de l'angle BAC.

Exercice 95. *Soit la droite* $d : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ *et le point* $A(4; 2; -4)$.

a) Déterminez le point P *de la droite* d *qui est le plus proche du point* A.

b) Déterminez le symétrique de A *par rapport à* d *(symétrie axiale).*

Exercice 96. *Soient les points* $A(3; 0; 1)$, $B(0; 1; 3)$ *et* $C(5; 4; 3)$.

a) *Déterminez les coordonnées de* D *tel que* $ABCD$ *soit un parallélogramme.*
b) *Calculez l'aire de ce parallélogramme ainsi que la distance de* C *à* AB.
c) *Déterminez une équation cartésienne du plan* π *contenant* A, B *et* C.
d) *Déterminez une équation cartésienne du plan* $\pi' \perp \pi$ *qui contient la droite* AB.
e) *Calculez la distance de* C *à* π'. *Que remarquez-vous ?*

Exercice 97. *Soient les droites* $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ *et* $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 3\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$.

a) *Quelle est la position relative de ces deux droites ?*
b) *Déterminez un vecteur directeur de la perpendiculaire commune à* d_1 *et* d_2.
c) *Déterminez une équation cartésienne du plan* π *contenant* d_1 *et la perpendiculaire commune à* d_1 *et* d_2.
d) *Déterminez les coordonnées du point d'intersection de* π *avec* d_2.
e) *Déterminez des équations paramétriques de la perpendiculaire commune à* d_1 *et* d_2.

Exercice 98. *Déterminez l'équation de la sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $C(-4;11;-9)$ *et de rayon 13.*

Exercice 99. *Soient les points* $A(2;-2;14)$, $B(12;-2;-1)$, $D(1;-18;5)$ *et* $E(10;-3;-11)$.

a) Déterminez si ces points appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$ *de centre* $C(5;-6;2)$ *et de rayon 13.*

b) Pour les points n'appartenant pas à la sphère $\mathcal{S}$, *déterminez s'ils sont à l'intérieur ou à l'extérieur de cette sphère.*

Exercice 100. *Donnez l'équation de la sphère* $\mathcal{S}$ *centrée en* $C(1;-2;3)$ *et de rayon* $r=7$, *puis déterminez, par rapport à* $\mathcal{S}$, *où se situent les points* $A(3;3;-1)$, $B(-2;4;1)$ *et* $C(6;2;6)$.

Exercice 101. *Soient les points* $A(4;2;-3)$, $B(-1;3;1)$, $D(2;3;7)$ *et* $E(1;5;9)$.

Déterminez l'équation cartésienne de la sphère passant par les points A, B *et ayant son centre sur la droite passant par* D *et* E.

Exercice 102. *Déterminez le centre et le rayon des sphères suivantes :*

- ⋆ $\mathcal{S}_1 : x^2+y^2+z^2-8x+6z-11=0$
- ⋆ $\mathcal{S}_2 : x^2+y^2+z^2+2x-y-2z+\frac{1}{4}=0$
- ⋆ $\mathcal{S}_3 : x^2+y^2+z^2-6x+10=0$
- ⋆ $\mathcal{S}_4 : x^2+y^2+z^2-6x+14y-24z+102=0$

Exercice 103. *Les équations suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, déterminez leur centre et leur rayon.*

- ⋆ $x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+22=0$
- ⋆ $x^2+y^2+z^2-12x-2y+6z+56=0$
- ⋆ $2x^2+2y^2+2z^2-2x+8y+2z-87=0$

Exercice 104. *Déterminez la position de chacune des droites suivantes par rapport à la sphère* $\mathcal{S} : (x-1)^2+(y-5)^2+(z-2)^2-14=0$ *et précisez les points d'intersection éventuels :*

$$d_1 : \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=6-\lambda \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x=7+2\lambda \\ y=7-\lambda \\ z=6-\lambda \end{cases} \qquad d_3 : \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=7-\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases}$$

Exercice 105. *Déterminez les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la sphère* $\mathcal{S}$ *d'équation*

$$\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-8x+4y-10z-124=0$$

et de la droite d *de vecteur directeur* $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ *passant par* $A(4;-2;5)$.

Exercice 106. *Soit la sphère $\mathcal{S}$ de centre $C(3;3;2)$ passant par $A(5;6;6)$.*

a) *Donnez l'équation de cette sphère.*

*b) *Déterminez l'équation du plan π tangent à $\mathcal{S}$ en A.*

c) *Déterminez la droite horizontale tangente à $\mathcal{S}$ en A.*

d) *Quels sont les points d'intersection de $\mathcal{S}$ avec l'axe Oz ?*

Exercice 107. *Déterminez l'équation de la sphère passant par $A(2;-2;1)$, $B(-1;1;5)$ et centrée sur l'axe Ox.*

Exercice 108. *Déterminez l'équation de la sphère de centre $M(2;0;-1)$ tangente à* $d : \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

Exercice 109. *Quels sont les points de* $d : \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 14 - 2\lambda \\ z = 7 - \lambda \end{cases}$ *situés à la distance $5\sqrt{2}$ du point $A(4;4;1)$?*

* **Exercice 110.** *Soient la sphère $\mathcal{S} : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169$ et le plan*

$$\pi : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

Déterminez les plans parallèles à π et tangents à $\mathcal{S}$, ainsi que leur point de contact.

Exercice 111. *Déterminez l'équation de la sphère tangente à* $t : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$ *en $T(4;?;?)$ et centrée sur l'axe Oy.*

Exercice 112. *Déterminez l'ensemble des points P tels que $PA \perp PB$, avec $A(1;-2;2)$ et $B(5;6;4)$.*

Exercice 113. *Soient le point $A(2;8;6)$ et la droite* $d : \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

a) *Déterminez $B \in d$ tel que OAB soit un triangle rectangle d'hypoténuse AB.*

b) *Déterminez $C \in d$ tel que OAC soit un triangle rectangle d'hypoténuse OA.*

* **Exercice 114.** *Soit la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $\mathcal{S} : (x+3)^2 + (y-15)^2 + (z-2)^2 = 225$.*

1. *Montrez que le point $T(7;4;4)$ appartient à $\mathcal{S}$;*
2. *Déterminez l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point T.*

Exercice 115. *Calculez le rayon de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $C(4;1;-5)$ qui est tangente au plan*

$$\pi : x + 2y + 2z = 4$$

Exercice 116. *Déterminez l'équation de la sphère de centre $M(2;0;-1)$ tangente au plan $\pi : x + 4y + 3z - 25 = 0$*

* **Exercice 117.** *Déterminez l'équation de la sphère tangente à $\pi : 2x - 3y - 3z + 24 = 0$ en $P(?;4;4)$ et...*

a) ...centrée dans la paroi.

b) ...passant par $A(5;3;-2)$.

Exercice 118. *Soient la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 159$ et le plan*

$$\pi : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

Déterminez les équations des plans parallèles au plan π et tangents à la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 119. *Soit la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 14z - 107 = 0$.*

Déterminez l'équation du (ou des) plan(s) tangent(s) au(x) point(s) de la forme $P(x;7;-4)$.

Exercice 120. *Déterminez le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère*

$$\mathcal{S} : x^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 - 146 = 0 \text{ et...}$$

a) ...du sol ; *b) ...du mur ;* *c) ...du plan $\pi : 7x + 4y - 4z - 65 = 0$.*

Exercice 121. *Soient la sphère $\mathcal{S}$ de centre $M(-1;6;-2)$ passant par $A(5;-1;2)$ et le plan π contenant A et l'axe Ox.*

a) Déterminez le centre et le rayon du cercle d'intersection $\mathcal{C}$.

b) Vérifiez que $P(-2;-2;4) \in \mathcal{C}$ et trouvez la droite $t\,(\subset \pi)$ tangente à $\mathcal{C}$ en P.

Exercice 122. *Soient la sphère $\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 62$ et le plan*

$$\pi : 3x - 7y + 2z + 88 = 0$$

Montrez que le plan π est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 123. *Soient les sphères*

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 144 \text{ et } \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 72 = 0.$$

Montrez que ces sphères sont tangentes puis trouvez le point de contact.

Indication : *Deux sphères peuvent être tangentes (internes ou externes), disjointes ou sécantes. Pour déterminer cette position relative, nous calculons la distance entre les centres des sphères puis esquissons un schéma.*

Exercice 124. ***BAC 2000***

1. *Dessiner les traces du plan* $\alpha : 2x + y + 2z - 10 = 0$.
2. *La droite horizontale* h *passe par* $A(3; 0; 2)$ *et est contenue dans le plan* α.
   (a) *Dessiner cette droite ainsi que sa projection sur le sol.*
   (b) *Montrer que* $\vec{h} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}$ *est un vecteur directeur de* h.
3. *La sphère* $\mathcal{S}$ *est centrée en* $C(-2; 0; 7)$ *et passe par* A.
   (a) *Établir l'équation de cette sphère.*
   (b) *Calculer les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite* h *et de la sphère.*
4. *La droite* d *est tangente à la sphère* $\mathcal{S}$ *en* A *et perpendiculaire à* h. *Trouver un vecteur directeur de* d.
5. *On considère le plan* $\beta : 2x + y + k = 0$.
   (a) *Trouver* k *sachant que le plan contient la droite* h.
   (b) *Dessiner les traces du plan* β.
   (c) *De quel angle* φ *faut-il faire tourner le plan* α *autour de la droite* h *pour l'amener sur le plan* β *?*
   (d) *Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère* $\mathcal{S}$ *et du plan* β.

Exercice 125. ***BAC 2013***

On considère le plan $\pi : 3x + 2y - 2z - 6 = 0$ *et la droite* $d : \begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

1. *Dessiner les traces du plan* π*, la droite* d *ainsi que la droite* d_2*, projection de la droite* d *dans le mur (Feuille en mode « paysage »).*

2. *Montrer que l'équation du plan* α *qui contient la droite* d *et qui est parallèle à l'axe* Ox *est* $\alpha : y + z - 2 = 0$.

3. *Dessiner les traces du plan* α *puis la droite d'intersection des deux plans* π *et* α.

4. *Calculer l'angle aigu formé par la droite* d *et la paroi.*

   On considère encore deux sphères :

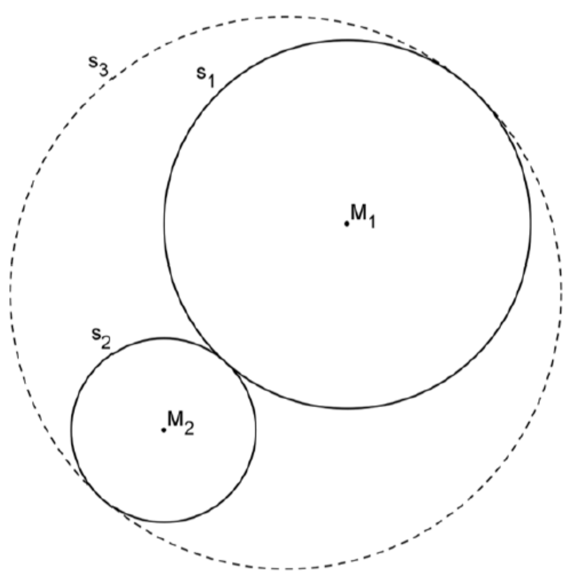
   $$\mathcal{S}_1 : (x-1)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 36 \text{ et } \mathcal{S}_2 : (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$$

5. *Montrer que le point* $P(5; 2; 1)$ *appartient aux deux sphères.*

6. *Trouver un vecteur directeur de la droite* t *qui est tangente à la sphère* $\mathcal{S}_1$ *au point* P *et qui est parallèle au plan* π.

7. *Expliquer pourquoi* P *est le seul point qui appartient aux deux sphères.*

8. *Déterminer le rayon et le centre de* $\mathcal{S}_3$*, qui est la plus petite sphère contenant les deux sphères* $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_2$ *(voir le schéma ci-dessous).*



Exercice 126. ***BAC 2010***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan $\pi : 2x + 2y - z - 9 = 0$, *le point* $A(-16;0;4)$ *et la droite* $d : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

1. *Vérifier que le point d'intersection de la droite d et du plan* π *est* $I(5;0;1)$.

2. *Calculer l'angle aigu entre* π *et d.*

3. *Dessiner les traces du plan* π, *la droite d ainsi que sa projection orthogonale dans le mur.*

4. *Montrer que le point* $B(-6;10;-1)$ *est la projection orthogonale du point* $A(-16;0;4)$ *sur le plan* π.

5. *Le triangle* ABI *est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ? Justifier chaque réponse par un raisonnement ou un calcul.*

6. *Le point* $P(11;0;z)$ *appartient au plan* π.

   Trouver z *et calculer le volume du tétraèdre* $ABIP$.

7. *On considère la sphère* $\mathcal{S}$ *centrée en* $A(-16;0;4)$ *et de rayon 10. Cette sphère et le plan* π *sont disjoints. Déterminer le point de la sphère* $\mathcal{S}$ *le plus proche du plan* π.

8. *Trouver les équations de* α *et* β, *qui sont les plans parallèles au plan* π *et dont l'intersection avec la sphère* $\mathcal{S}$ *est un cercle de rayon 8.*

Exercice 127. *Soit le triangle de sommets* $A(-2;4;-4)$, $B(3;1;2)$ *et* $C(4;-2;2)$.

a) *Vérifiez que les points* A, B *et* C *ne sont effectivement pas alignés.*

b) *Déterminez l'angle* α *au sommet* A *du triangle* ABC.

c) *Trouvez des équations paramétriques des médianes* m_A *et* m_C *du triangle* ABC.

d) *Déterminez le point d'intersection de ces deux médianes.*

e) *Vérifiez que le point d'intersection trouvé est le centre de gravité du triangle.*

f) *Déterminez l'angle aigu que forme la médiane* m_A *avec le mur.*

g) *Considérons le plan* $\pi : 2x-2y+z+8=0$. *Trouvez le sommet du triangle* ABC *qui est le plus proche de* π. *À quelle distance de* π *ce sommet se situe-t-il ?*

h) *Déterminez le point* A', *projection orthogonale de* A *sur* π.

Exercice 128. *Calculez* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 129. *Sachant que* $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$, *exprimez les vecteurs :*

$$\vec{a} = (2\vec{v}_1) \wedge (3\vec{v}_2) \quad et \quad \vec{b} = (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2)$$

dans la base standard $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

Exercice 130.

a) *Trouvez une équation cartésienne du plan* π *contenant les points* $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ *et* $C(2;1;0)$.

b) *Calculez l'aire du triangle* ABC.

Exercice 131.

a) À l'aide d'un produit vectoriel, trouvez un vecteur directeur de la droite d'intersection des plans $\alpha : x - y + z - 4 = 0$ *et* $\beta : 2x + y - 3z - 11 = 0$.

b) Donnez des équations paramétriques de cette droite.

Exercice 132. *Calculez la distance qui sépare respectivement les points* $A(2;0;1)$, $B(2;3;1)$ *et* $C(6;1;3)$ *de la droite qui passe par* $E(4;-6;-3)$ *et* $F(3;2;1)$.

Exercice 133. *Déterminez l'équation de la sphère tangente à* $\pi : 2x + 2y + z - 11 = 0$ *en* $T(?;1;1)$ *et qui est centrée dans le sol.*

Exercice 134. *Soient les points* $A(1;2;-5)$ *et* $B(5;4;3)$.

Déterminez l'ensemble des points $P(x;y;z)$ *tels que* $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$.

Exercice 135. *Soient le plan* $\pi : 3x + 4y + 12z - 24 = 0$ *ainsi que les points* $A(4;-3;2)$, $B(-4;3;2)$ *et* $C(4;0;1)$.

a) *Vérifiez que le triangle* ABC *est situé dans le plan* π.

b) *Calculer l'aire de ce triangle ainsi que la valeur de l'angle de sommet* A.

c) *Dessinez les traces de* π, *et coloriez, sur* π, *la partie visible du triangle* ABC.

d) *Trouvez une équation cartésienne de la sphère* $\mathcal{S}_1$ *centrée en* $M(14;8;24)$ *et tangente au plan* π. *Calculez les coordonnées du point de contact* T.

e) *La sphère* $\mathcal{S}_2$ *est également centrée en* $M(14;8;24)$ *mais son rayon vaut* $\sqrt{776}$. *Elle coupe le plan* π *selon un cercle* $\mathcal{C}$. *Déterminez le centre et le rayon de ce cercle.*

f) *Soit* I *le point d'intersection du plan* π *avec l'axe* Oy. *Prouvez que* I *est sur le cercle* $\mathcal{C}$ *décrit au point précédent.*

g) *Trouvez une représentation paramétrique de la droite* t *qui est incluse dans* π *et qui est tangente à* $\mathcal{C}$ *en* I.