LDDR – Niveau I : Dérivées

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = 4x^2 - 3x + 2$ b) $y = 5 - 6x$ c) $y = 2 + 5x - 3x^2$

d) $y = 3$ e) $y = 8x(1 - x)$

3. Trouver la pente de la tangente au graphe des fonctions suivantes en $x_0 = -4$.

a) $y = -x^2$ $y = (3 - x)(2x - 4)$

Réponses 8 b) 26

4. Pour chaque fonction, trouver les coordonnées du point du graphe en leque la tangente a la pente indiquée.

a) $y = 2x - 5x^2$, $pente = 32$ b) $y = 3x(1 + x)$, $pente = 0$

Réponses a) $(-3; -51)$ b) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$

5. Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5$. Une tangente au graphe de f a pour équation $y = 4x + h$. Trouver h.

Réponse $h = -9$

6. Dans chaque cas, trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 donnée.

a) $y = 3x^2$, $x_0 = -2$ b) $y = x - x^2$, $x_0 = 2$

c) $y = x^2 - 7$, $x_0 = -1$

Réponses a) $y = -12x - 12$ b) $y = -3x + 4$ c) $y = -2x - 8$

7. Le graphe de $y = x^2 - 3x$ a une tangente qui est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 2$. Trouver l'équation de cette tangente.

Réponse $y = -5x - 1$

8. En un certain point du graphe $y = x^2 + c$, la tangente est la droite d'équation $y = -2x + 3$. Trouver la valeur de c.

9. Considérons la fonction $f: x \longmapsto y = 1/x$. Trouver les équations des tangentes au graphe de f qui sont parallèles à la droite d'équation $y = -0.25x$.

Réponse $y = -0.25x - 1$ et $y = -0.25x + 1$

10. Considérons la fonction $f: x \longmapsto y = \sqrt{x}$

a) Trouver l'équation de la tangente au graphe de f au point $T(9; \ldots)$.

b) Au voisinage de T cette tangente est proche du graphe de f.

Donc pour x proche de 9, on a $\frac{1}{6}x + \frac{3}{2} \cong \sqrt{x}$.

Utiliser ceci pour estimer $\sqrt{9.6}$

Réponse a) $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ b) $\sqrt{9.6} \simeq 3.1$

11. On considère la fonction : $x \longmapsto y = \frac{1}{x}$. Une tangente au graphe de f passe par le point $(0; 6)$.

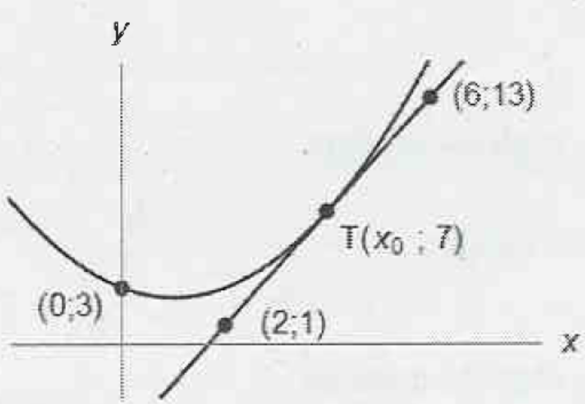
Trouver l'équation de cette tangente et les coordonnées du point de tangence T.

Réponse tangente : $y = -9x + 6$, $T\left(\frac{1}{3}; 3\right)$

12. On considère la situation graphique suivante. Le dessin n'est pas à l'échelle.

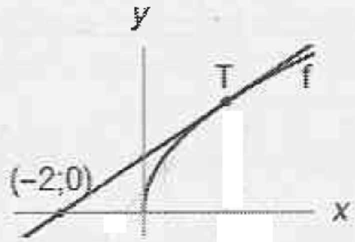
La droite tangente à la parabole au point T.

Trouver l'équation de la parabole.



Réponse $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$

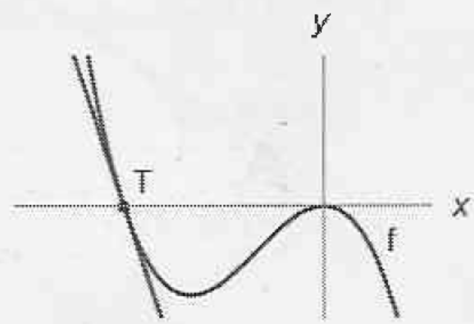
13. On considère la situation graphique suivante. Le dessin n'est pas à l'échelle. La fonction est donnée par $y = f(x) = \sqrt{x}$ et la droite est tangente au graphe au point T. Calculer les coordonnées du point de tangence T.



Réponse $T(2\,;\sqrt{2})$

14. En utilisant les règles 1 à 5, trouver la dérivée des fonctions suivantes.

15. Le graphe de $y = ax^3 + bx^2$ coupe l'axe des abscisses en un point T où la tangente est la droite d'équation $y = -4x - 8$.
Trouver a et b.
Réponse $a = -1; b = -2$



16. En quels points le graphe de $f: x \longmapsto y = \frac{x}{1-x}$ admet-il une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0.25x$?
Réponse $(-1; -0{,}5)$ ou $(3; -1.5)$.

17. Dériver les fonctions suivantes.

18. Dans chaque cas trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 donnée.

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = \frac{1}{4}$ b) $y = \sqrt[3]{x}, x_0 = -8$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 27$

Réponses

a) $y = -4x + 3$ b) $y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$ c) $y = -\frac{1}{243}x + \frac{4}{9}$

20. Trouver l'équation de la tangente au graphe de $y = \frac{32}{(3x-1)^4}$ au point d'ordonnée $y_0 = 2$ et d'abscisse positive.

Réponse $y = -12x + 14$

21. Trouver l'équation de la tangente au graphe de $y = \cos(2\pi x)$ au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{4}$

Réponse $y = -2\pi x + \frac{\pi}{2}$

22. Trouver l'équation de la tangente au graphe de $y = x \cdot \sin(x)$ au point d'abscisse $x_0 = \pi$

Réponse $y = -\pi x + \pi^2$

23. Donner les équations des droites qui passent par le point $A(-1; 2)$ et qui sont tangentes à la courbe $y = \frac{1}{2x-2}$

Réponse $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ en $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ et $y = -2x$ en $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

24. Considérons la fonction $f: x \longmapsto y = a\sin(x) + b\cos(x)$. On sait que le graphe de f admet une tangente horizontale au point $\left(\frac{\pi}{3}; 3\right)$. Calculer les valeurs de a et b.

Réponse $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b = \frac{3}{2}$

25. Considérons la fonction $f: x \longmapsto y = x^3 + mx^2 + x$. Trouver m tel que le graphe de f

a) a exactement une tangente dont la pente vaut -11.

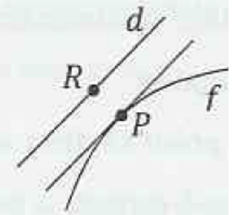
b) a exactement une tangente horizontale.

c) n'a aucune tangente horizontale.

d) n'a aucune tangente dont la pente vaut 1.

Réponses a) $m = \pm 6$ b) $m = \pm\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

26. Considérons la fonction $f: x \longmapsto y = \sqrt{5x + 15} - 6$ et la droite d d'équation $y = 0.5x$.



a) Soit P le point du graphe de f qui est le plus proche de la droite d. Calculer les coordonnées de P.

b) Soit R le point de la droite d qui est le plus proche du graphe de f. Calculer les coordonnées de R.

Réponse a) $P(2; -1)$ b) $R(1.2; 0.6)$

27. Pour chaque fonction, trouver les points à tangente horizontale de f et indiquer s'il s'agit de maximums, minimums ou points d'inflexion.

a) $f(x) = x + 1 + \cos(\pi x)$, pour $0 < x < 2$

Réponse $(0.10; 2.05)$ maximum, $(0.90; 0.95)$ minimum.

b) $f(x) = \dfrac{3x^2+9x}{1-x}$

Dans le tableau de variation ne pas oublier les exclus.

Réponse $(-1; -3)$ minimum, $(3; -27)$ maximum

28. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x - 13)$

a) Déterminer la variation et les points stationnaires de f.

b) Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$ $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Utiliser ceci et les résultats de a) pour esquisser le graphe de f.

c) Quel est le nombre de zéros de f ?

d) Pour quelles valeurs de m l'équation

$\dfrac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x - 13) + m = 0$ n'a-t-elle qu'une seule solution ?

Réponses a) $(-1; -2)$ maximum, $(3; -10)$ minimum

d) $m < 2$ or $m > 10$

29. Trouver, en fonction de m, le nombre de points stationnaires de la fonction f.

a) $f: x \longmapsto y = 2x^3 + mx^2 + 6x$

Réponse $-6 < m < 6$ aucun ; $m = -6$ or $m = 6$ un ; sinon deux

b) $f: x \longmapsto y = x^3 + mx^2 + 3x$

Réponse $-3 < m < 3$ aucun ; $m = -3$ or $m = 3$ un ; sinon deux

Etude de

$$f : x \longmapsto y = \frac{2x^3 + x^2 - 5x}{x^2 - 1}$$

1. Domaine : tous les nombres sauf -1 et 1 : $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

2. Intersection avec l'axe y : $(0; 0)$

		-1.85		-1		0		1		1.35	
Signe de f	$-$	0	+	X	$-$	0	+	X	$-$	0	+

3. Asymptote verticale : $x = -1$

   Justification : si x tends vers -1, alors la forme de $f(x)$ est " $\frac{4}{0}$ ", donc $f(x)$ tends vers $\pm\infty$

   Asymptote verticale : $x = 1$

   Justification : si x tends vers 1, alors la forme de $f(x)$ est " $\frac{-2}{0}$ ",

   donc $f(x)$ tends vers $\pm\infty$

   Asymptote à l'infini : $y = 2x + 1$

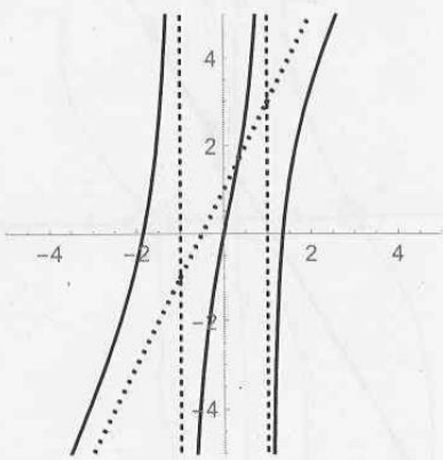
   Justification : la division de $2x^3 + x^2 - 5x$ par $x^2 - 1$ donne le quotient $2x + 1$ et le reste $-3x + 1$, donc $f(x) = 2x + 1 + \frac{-3x+1}{x^2-1}$.

   Si x tends vers $\pm\infty$, alors $f(x) - (2x + 1) = \frac{-3x + 1}{x^2 - 1} \cong \frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x}$ qui tends vers 0

   Intersection entre le graphe de f et l'asymptote à l'infini: $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

   En effet $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

4. Graphe



Etude de $f: x \longmapsto y = \sin(x) \cdot (2 - \cos(x))^2$

1. Domaine : tous les nombres, la fonction est 2π-periodique donc étudiée sur $[-\pi\,;\pi]$

2. Intersection avec l'axe y : (0;0)

	$-\pi$		0		π
Signe de f	0	$-$	0	$+$	0

3. Asymptotes : aucune

4. Dérivée : $f'(x) = (2 - \cos(x)) \cdot (-3\cos^2(x) + 2\cos(x) + 2)$

	$-\pi$		-2.15		2.15		π
Signe de f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
Variation de f	↘	↘	→	↗	→	↘	↘

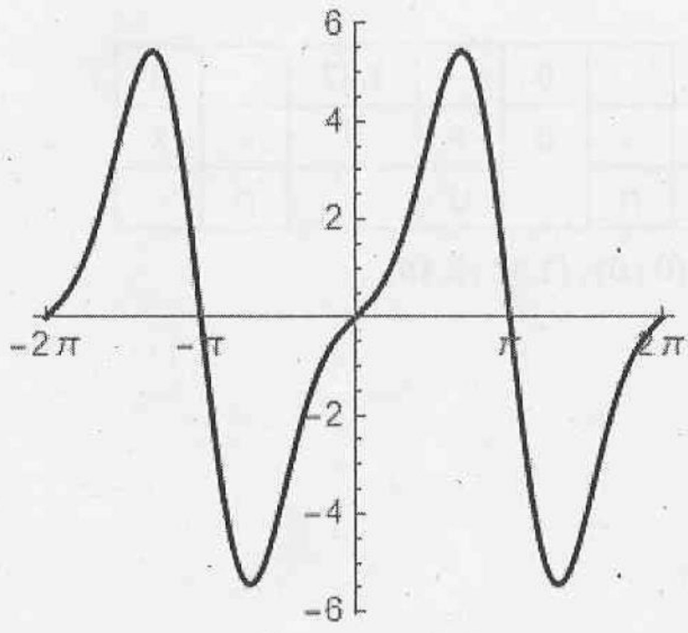
Minimum : $(-2.15; -5.43)$ Maximum: $(2.15; 5.43)$

5. Deuxième dérivée : $f''(x) = \sin(x) \cdot (-9\cos^2(x) + 16\cos(x) - 2)$

	$-\pi$		-1.44		0		1.44		π
Signe de f''	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
Courbure de f		∪		∩		∪		∩	

Points d'inflexion : $(-\pi; 0)$; $(-1.44; -3.45)$; $(0; 0)$; $(1.44; 3.45)$; $(\pi; 0)$

6. Graphe



7. La fonction impaire.

Etude de $f: x \mapsto y = x^3 \cdot \sqrt{4 - x^2}$

1. Domaine : $[-2; 2]$

2. Intersection avec l'axe y : (0 ; 0)

	-2		0		2
Signe de f	0	–	0	+	0

3. Asymptotes : aucune

4. Dérivée : $f'(x) = \dfrac{-4x^4 + 12x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

   Les exclus de f' sont –2 et 2

	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2
Signe de f'	X	–	0	+	0	+	0	–	X
Variation de f	↓	↘	→	↗	→	↗	→	↘	↑

Minimum : (–1.73 ; –5.20)   Point d'inflexion : (0 ; 0)   Maximum : (1.73 ; 5.20)

Il y a une tangent vertical en $x_0 = -2$ et $x_0 = 2$, car

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$$

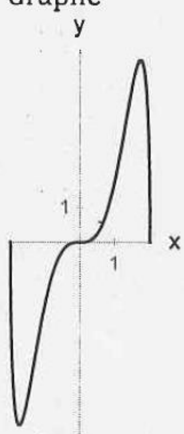
5. Deuxième dérivée : $f''(x) = \dfrac{4x(3x^4 - 19x^2 + 24)}{(4 - x^2)^{3/2}}$

   Les exclus de f'' sont –2 et 2

	-2		-1.32		0		1.32		2
Signe de f''	X	+	0	–	0	+	0	–	X
Courbure de f		∪		∩		∪		∩	

Points d'inflexion : (–1.32 ; –3.46) , (0 ; 0) , (1.32 ; 3.46)

6. Graphe



7. La fonction est impaire.

Étude de

$$f : x \longmapsto y = \frac{x^3 - 2x^2 + 28x + 72}{2x^2 - 72} = \frac{(x+2)(x^2 - 4x + 36)}{2x^2 - 72} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{64x}{2x^2 - 72}$$

1. Domaine : tous les nombres sauf -6 et 6 : $\mathbb{R} \setminus \{-6; 6\}$

2. Intersection avec l'axe y : $(0; -1)$

		-6		-2		6	
Signe de f	$-$	X	$+$	0	$-$	X	$+$

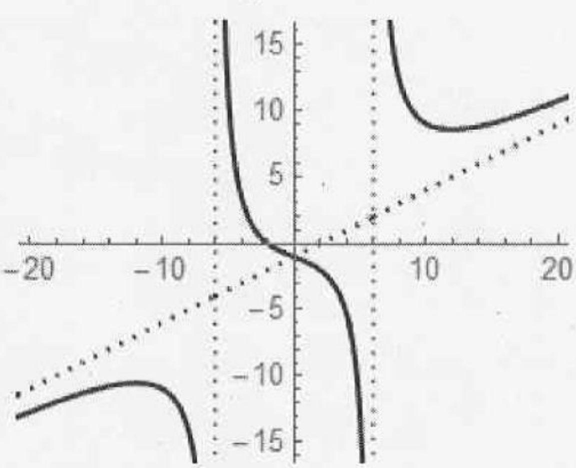
3. Asymptotes : verticales : $x = -6$ et $x = 6$, vers l'infini : $y = \frac{1}{2}x - 1$
Intersection du graphe de f et de l'asymptote vers l'infini : $(0; -1)$

4. Dérivée $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 272x^2 - 2016}{(2x^2 - 72)^2}$

		-11.96		-6		6		11.96	
Signe de f'	$+$	0	$-$	X	$-$	X	$-$	0	$+$
Variation de f	↗	→	↘	X	↘	X	↘	→	↗

Maximum : $(-11.96; -10.56)$ Minimum : $(11.96; 8.56)$

5. Graphe



6. La fonction n'est ni paire ni impaire

Etude de $f: x \longmapsto y = 2\sin^2(x) + 2\sin(x)$

1. Domaine : tous les nombres, la fonction est 2π-periodique donc étudiée sur $[0\,;2\pi]$
2. Intersection avec l'axe y : (0 ; 0)

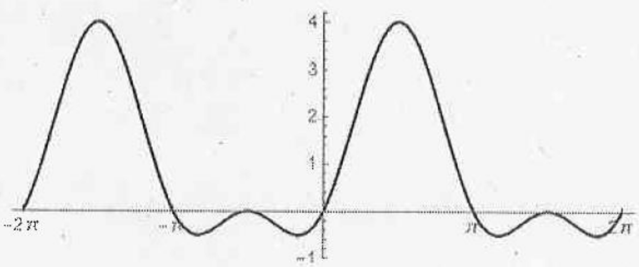
	0		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Signe de f	0	+	0	–	0	–	0

3. Asymptotes : aucune
4. Dérivée : $f'(x) = 2\cos(x)\,(1 + 2\sin(x))$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Signe de f'	+	+	0	–	0	+	0	–	0	+	+
Variation de f	↗	↗	→	↘	→	↗	→	↘	→	↗	↗

Maximums : (1.57 ; 4) , (4.71 ; 0) Minimums : (3.67 ; –0.5) , (5.76 ; –0.5)

5. Graphe



6. La fonction n'est ni paire ni impaire.

Étude de

$$f : x \longmapsto y = \frac{x^3 - 10x}{x^2 - 16}$$

1. Domaine : tous les nombres sauf −4 et 4
2. Intersection avec l'axe y : (0 ; 0)

		−4		$-\sqrt{10}$		0		$\sqrt{10}$		4	
Signe de f	−	X	+	0	−	0	+	0	−	X	+

3. Asymptotes : verticales : $x = -4$ and $x = 4$, vers l'infini : $y = x$

   Intersection du graphe de f et de l'asymptote vers l'infini : (0 ; 0)

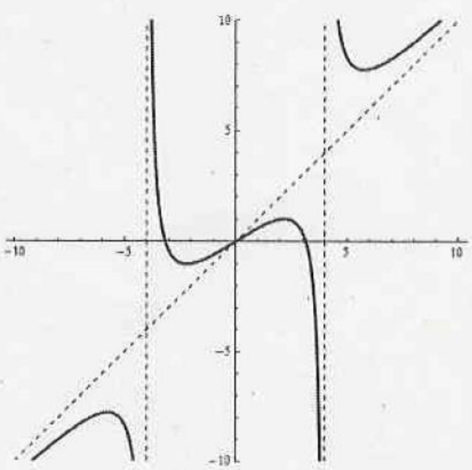
4. Dérivée $f'(x) = \dfrac{x^4 - 38x^2 + 160}{(x^2 - 16)^2}$

		−5.76		−4		−2.20		2.20		4		5.76	
Signe de f'	+	0	−	X	−	0	+	0	−	X	−	0	+
Variation de f	↗	→	↘	X	↘	→	↗	→	↘	X	↘	→	↗

   Maximums : (−5.76 ; −7.77) et (2.20 ; 1.02)

   Minimums : (−2.20 ; −1.02) et (5.76 ; 7.77)

5. Graphe



6. La fonction est impaire

Exercice 1

Trouver les dimensions d'un cylindre d'un demi-litre dont l'aire est minimum.

Le cylindre est constitué de trois pièces : un couvercle, un fond et une surface latérale.

Indication

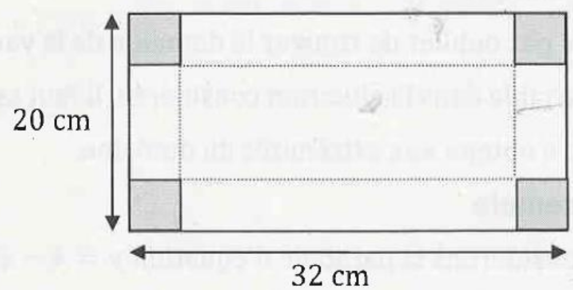
Si on coupe le cylindre le long d'une droite verticale (génératrice) et qu'on le développe on obtient un rectangle.

Réponse

$hauteur = 2 \cdot rayon \cong 8.6\ cm$

Exercice 2

Une boite rectangulaire est obtenue en enlevant quatre carrés aux quatre angles d'un rectangle de carton et en pliant le long des lignes pointillées.



La boite n'a pas de couvercle.

Trouver la hauteur x de la boite pour laquelle le volume de la boite est maximum.

Quel est ce volume ?

Réponse

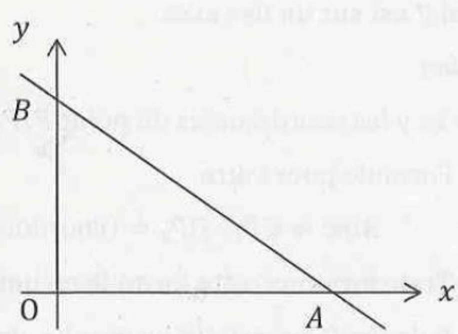
$V_{maximum} = 1152\ cm^3$

Exercice 3

On considère la droite d'équation

$y = -mx + 2m + 1, m > 0.$

Soit A et B les points d'intersection de cette droite avec les axes x et y respectivement.



Trouver m de façon que l'aire du triangle OAB soit extrémale (O est l'origine).

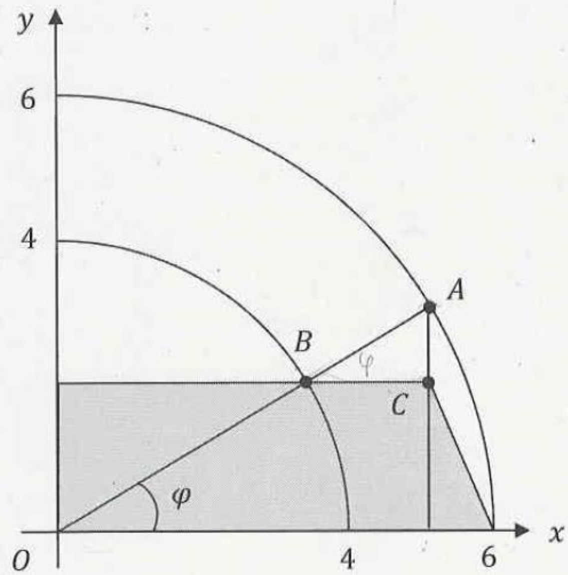
Cet extremum est-il un maximum ou un minimum ?

Réponse

$m = \frac{1}{2}$. C'est un minimum.

Exercice 4

Dans la figure les cercles sont centrés à l'origine et de rayons 4 cm et 6 cm respectivement. L'angle φ est compris entre 0 and $\frac{\pi}{2}$.



a) Trouver les coordonnées des points A, B et C en fonction de φ.

b) Trouver l'aire $Aire$ du trapèze grisé.

c) Calculer la valeur de φ pour laquelle l'aire $Aire$ est maximum. Quelle est cette aire ?

Réponse

c) $\varphi = \pi/3$ and $Aire_{max} = 9\sqrt{3} \cong 15.59 \text{ cm}^2$

Exercice 5

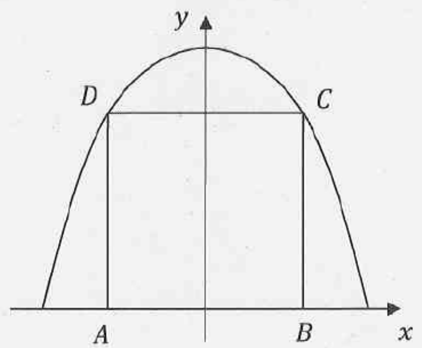
Sur le graphe de la fonction f définie par $f(x) = 4 - x^2$ trouver les points qui sont le plus proches de l'origine et donner cette distance minimum.

Réponse

$(\pm\sqrt{3.5}\,; 0.5) \cong (1.87; 0.5)$; $d_{minimum} = 1.9364 \ldots$

Exercice 6

Considérons le rectangle $ABCD$ avec C et D sur la parabole d'équations $y = 4 - x^2$.



Considérons le cylindre généré par la rotation du rectangle autour de l'axe x.

Appelons m l'abscisse (première coordonnée) de B, $0 < m < 2$.

a) Déterminer une formule qui donne le volume du cylindre en fonction de m :

$V = V(m) = \cdots$

b) Pour quelle valeur de m ce volume est-il maximum et que vaut ce volume maximum ?

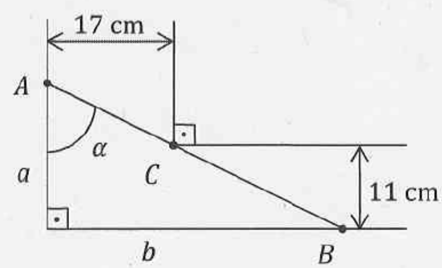
Réponse

$m = 0.8944 \ldots$ et $V_{max} = 57.5472 \ldots$

Exercice 7

Dans la figure on considère les segments AB tels que

Le point C appartient au segment, le point A appartient à la droite a et le point B appartient à la droite b. Trouver la longueur du plus court de ces segments.



Indication Trouver une formule qui donne la longueur du segment en fonction de l'angle α. Utiliser deux triangles rectangles dont les hypoténuses sont AC et BC et dont les autres côtés sont parallèles à a et à b.

Réponse

$longueur_{min} = 39.2916 \ldots$ cm