Rappel

Exercice 1

Pour chacune des fonctions, déterminer l'ensemble de définition, puis calculer les intersections du graphe de f avec les axes :

a) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$

b) $f(x) = \dfrac{3x^3 - x}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x)$

Exercice 2

Faire un tableau donnant le signe de la fonction suivante :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{9 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{-x(x-3)(x+4)}{(x-1)^2}$

Exercice 3

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(4x-3)(x-2)}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} x\sqrt{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & si\ x < 4 \\ 5 & si\ x = 4 \\ x^3 - 4x & si\ x > 4 \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si\ x < 0 \\ 4 & si\ x = 0 \\ 2x^3 + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 4

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} =$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} =$

d) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} =$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} =$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1} =$

Exercice 5

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} =$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-4} =$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1} =$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+3)^2}{(x-1)^3(x^2-9)} =$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} =$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{x^2+4x+3} =$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{2x-7} =$

Exercice 6

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} =$

f) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sin(x+5)}{x^2-25} =$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos^2(x)} =$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x^2\cot(x)} =$

Exercice 7

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+4x-2}{2x^2+x+3} =$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+2x-5}{x^2+4+x^3} =$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{x^2+x+1} =$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-x}{2x^2-3} =$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-5}{x^2-6x+5} =$

g) $\dfrac{x^4-x^3+4}{2x^5+1} =$

Analyse

Exercice d'entrainement

Calculer, simplifier au maximum :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)^2}{x^2-4x+4}=$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x}{x^2+4x+3}=$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}=$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3-2}{x^3+x^2-2}=$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{(x-3)(x-1)^2}=$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-14x+24}{x^2-2x-3}=$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{9-x^2}=$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{25-x^2}=$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{9-x^2}=$

j) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{16-x^2}=$

k) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sin(x+7)}{x^2-49}=$

l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}=$

m) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}=$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+4}{(x+3)(x-1)^2}=$

o) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-8x^2+16x}{x^2-16}=$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}=$

Exercice 8

Etudier la continuité de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1 & si\quad x<2\\ -x+3 & si\quad x\geq 2\end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2}, & si\quad x\neq 0\\ 4\ , & si\quad x=0\end{cases}$

Exercice 9

Quelle valeur faut-il attribuer à a pour que la fonction f soit continue ?

a) $f(x)=\begin{cases}x+1 & si\quad x\leq 1\\ 3-ax^2 & si\quad x>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\cos(\pi-x) & si\quad x\leq 0\\ \dfrac{x+a\sin(x)}{\sin(x)} & si\quad x>0\end{cases}$

Exercice 10

Selon la définition analytique de la dérivée en x_o, calculer le nombre $f'(x_o)$ pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = \cos(x)$

Indications :

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

Exercice 11

En utilisant la formule pour calculer la dérivée d'un produit, trouvé :

a) $(x^4)'=$

b) $(x^5)'=$

c) $(x^6)'=$

Déduire : $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

Exercice 12

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + x^2$

b) $f(x) = 4x^4 - 5x^2 - 7$

c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

f) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$

g) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

i) $f(x) = \frac{1}{3x^4 + 2x^2 - 5x}$

j) $f(x) = \frac{4}{x^3 - 2x}$

k) $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 4}$

l) $f(x) = \frac{5x^2}{x + 1}$

m) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 4x - 1}$

n) $f(x) = \frac{8x^2 - 6x + 1}{12x^2 - 7x + 1}$

Exercice 13

Etablir l'équation de la tangente au graphe de f au point A.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, A est le point d'intersection du graphe de f
1. avec l'axe des x.

b) $f(x) = x^3 + 2x$, $A(1 ; y)$

c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ $A(\frac{\pi}{4} ; ?)$

d) $f(x) = x^2 - 4x - 2$, A est le point d'intersection du graphe de f avec l'axe des y.

Exercice 14

A l'aide des réglés de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- **a)** $f(x) = \cos^2(x)$
- **b)** $f(x) = \sin^2(x)$
- **c)** $(x) = [1 + \sin(x)]^2$
- **g)** $f(x) = (ax + b)^4$
- **h)** $f(x) = (4 - x)^2$
- **i)** $f(x) = \cos(3x)$
- **j)** $f(x) = \tan[\sin(x)]$
- **k)** $f(x) = (3x^2 - 4x)^3$
- **l)** $f(x) = \cos(x^2 + x + 1)$
- **d)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- **e)** $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- **f)** $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$
- **m)** $f(x) = \sqrt{3x+2}$
- **n)** $f(x) = 4\sin(x) - 2\cos(\frac{\pi}{3})$
- **o)** $f(x) = \sqrt[3]{(4x^2-2x)^2}$
- **p)** $f(x) = \sqrt{1+\sin^2(x)}$
- **q)** $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$
- **r)** $f(x) = \sin^2(4x)$

Exercice 15

On considère la fonction suivante $f : x \mapsto y = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$

- **a)** Déterminer la pente de la tangente t au graphe de f en $x = \pi$.
- **b)** Sous quel angle la tangente t coupe l'axe des y ?
- **c)** Déterminer l'équation de cette tangente par trois méthodes différentes.

Exercice 16

Montrer que :

L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(x_0 ; f(x_0))$ est donnée par

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Exercice 17

Quelle sont les points de la courbe d'équation $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

Exercice 18

Soit la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{x^2-7x+10}{2x-2}$

Déterminer les points du graphe de f en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$.

Exercice 19

Déterminer la valeur à attribuer au réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2+mx-10}{x^2-2x-3}$ au point où elle coupe l'axe des y soit parallèle à la droite d'équation $20x + 9y = 0$.

Exercice 20

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = 2\cos(x)$.

a) Sans faire l'étude de la fonction, dessiner soigneusement son graphe pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Calculer les coordonnées du point T du graphe, où la pente de la tangente vaut 2.

c) Déterminer l'équation de cette tangente.

d) Dessiner la tangente dans le même repère que le graphe de *f*.

Exercice 21

Déterminer l'abscisse de tous les points à tangente horizontale du graphe de :

a) $f(x) = x^3(2x + 5)^4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-1)^3}$

c) $f(x) = 5\cos(2x)$ (*facultatif*)

d) $f(x) = -4\sin^2(x)\cos^2(x)$

Exercice 22

Déterminer les zéros et les points à tangente horizontale du graphe de :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - \frac{13}{3}$$

Exercice 23

Examiner la variation de la fonction *f* :

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 30$

b) $f(x) = x^2(x - 2)^3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)^2}$

Exercice 24

On considère la fonction $f(x) = x^3 - kx^2 + 12x$

a) Trouver k pour que la tangente au graphe de f en $x = 1$ ait une pente égale à 1.

b) Donner l'équation de la tangente en $x = 2$.

c) En gardant toujours la valeur $k = 7$, chercher les zéros de f et de f'. Utiliser ses zéros pour tracer le graphe de f.

Exercice 25

On considère la fonction $f(x) = x^2 + mx + m$.

Pour quelle(s) de m le point H(4 ; y) est un point à tangente horizontale ?

~~Pour quelle(s) de *m* le point H(0 ; *y*) est sur l'axe des *x* ?~~

Exercice 26

Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3 + a x^2 + bx$ admet-elle au point (1 ; 1) une tangente horizontale?

Exercice 27

Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

Exercice 28

Déterminer a pour que la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x+a}$$

admette un minimum d'ordonnée 8 (y = 8).

Exercice 29

Soit la fonction $f:\ x \mapsto y = \dfrac{3x(x-a)}{x^2+9}, \quad a \neq 0$

Montrer que le graphe de f admet toujours 2 points à tangente horizontale.

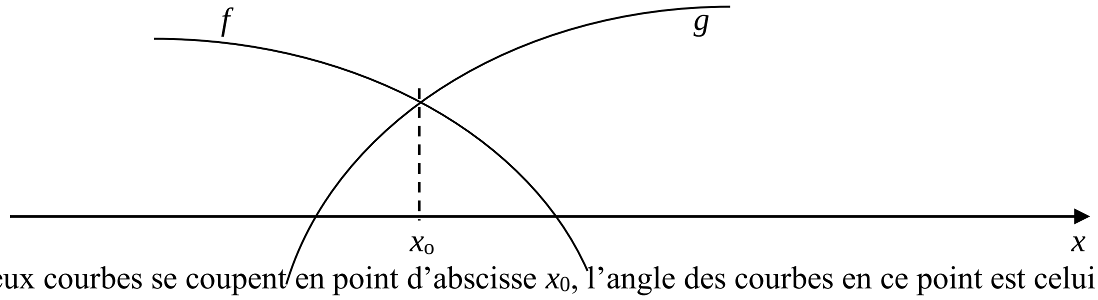
Exercice 30

Sous quelle angle aigu le graphe de $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ coupe :

- **a)** l'axe des y ?
- **b)** l'axe des x ?

Exercice 31

Angle entre deux courbes



Si deux courbes se coupent en point d'abscisse x_0, l'angle des courbes en ce point est celui que déterminent les deux tangentes correspondantes :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{t}_f \bullet \vec{t}_g|}{\|\vec{t}_f\| \cdot \|\vec{t}_g\|}$$

Relativement à un repère métrique, on trace les graphes de deux fonctions f et g en tenant compte des zéros et des points à tangente horizontale. Calculer les points d'intersection des deux graphes et l'angle aigu que font les courbes en ces points:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ **c)** $f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \frac{1}{2}x$ $g(x) = -x^2 + 10x - 15$ $g(x) = \cos(x)$

(90° et 45°) ($35{,}54^\circ$ et 45°) ($70{,}53^\circ$)

Exercice 33

1. Parité d'une fonction

Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une fonction paire.

Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à l'axe $0y$.

Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une fonction impaire.
Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à origine.
Donner deux exemples :

a) d'une fonction paire
b) d'une fonction impaire
c) d'une fonction qui est ni paire, ni impaire.

2. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont paires et celle qui sont impaires :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 - x}{x^6 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^4 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 2}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^3 - 1}$

Exercice 33

Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes (en précisant la position du graphe par rapport aux asymptotes) de chacune des fonctions f données ci-dessous :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$

Exercice 34

Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - x - 6}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

2. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{2 + x - x^2}$ **7.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ (facultatif)

3. $f(x) = -\dfrac{1}{4}(x - 1)^3(x - 5)$ **8.** $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ (facultatif)

4. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ (facultatif) **9.** $f(x) = \dfrac{8x^2}{(x-1)^3}$ (facultatif)

5. $f(x) = \dfrac{-3x + 6}{x^2}$

Analyse

Exercice 35

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \frac{5x}{x^2+4}$.

a) La droite d'équation $y = 1$ coupe le graphe de f en deux points.
Déterminer les abscisses (les x) de ces points.

b) Etudier la fonction f (domaine de définition, parité, point(s) d'intersection avec les axes, équation de l'asymptote, coordonnées des points à tangente horizontale, graphe en prenant 2 carreaux pour une unité).

On considère la fonction g dont le graphe est symétrique au graphe de f par rapport à la droite $y = 1$.

c) Avec une autre couleur, dessiner le graphe de g dans le même système d'axes que le graphe de f.

d) Donner les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de g.

Exercice 36

Etudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = [\sin(x) - 1]\sin(x)$

b) $f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$ *rappel : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$*

Exercice 37

Fabriquer une boîte de volume maximal, à partir d'une feuille de carton de 12cm de côté.

Exercice 38

Parmi les triangles isocèles de périmètre 10cm, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Exercice 39

Quelle est la plus grande aire possible d'un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon 5cm ?

Exercice 40

Parmi tous les rectangles inscriptibles dans un cercle de rayon *r*, quel est celui dont le périmètre est le plus grand ?

Exercice 41

Localiser sur la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ les points les plus proches de l'origine.