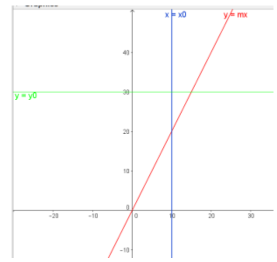
DROITES

Equation cartésienne : ax + by + c = 0 , |a|+|b| ≠0

L’équation ax + by + c = 0, lorsque |a| + |b| ≠0, représente une droite du plan. On appelle cette **équation cartésienne** de la droite.

- Si **a = 0** , on obtient une droite parallèle à l’ axe Ox, **y = y_0.**
- Si **b = 0**, on obtient une droite parallèle à l’axe Oy, **x = x_0.** **Attention !** Cette droite n’est pas une fonction.
- Si **c = 0** , on obtient une droite qui passe par l’ origine (0, 0), **y = mx**



Equation fonctionnelle : y = mx + h

!! Si b ≠0 , on peut écrire l’ équation cartésienne d’ une droite comme dessous :

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Cette dernière équation pour $m = -\frac{a}{b}$ et $h = -\frac{c}{b}$ est **l’équation fonctionnelle** de la droite. **Attention !** si b = 0 (c’est a dire pour les droites x = x_0) il n’existe pas équation fonctionnelle.

Exemples :

i. Eq. Cartésienne : x – 3y + 4 = 0 eq. Fonctionnelle : $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

ii. Eq. Cartésienne : 2y + 4 = 0 eq. Fonctionnelle : y = -2

iii. L’équation d’axe **Ox** est : **y = 0** iv. L’équation d’axe **Oy** est : **x = 0**

Le vecteur directeur et le vecteur normal

- Le *vecteur directeur* est un vecteur parallèle à la droite indiquant sa direction.
- Le ***vecteur normal*** est un vecteur perpendiculaire à la droite

Equation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot x_v \\ y = y_0 + \lambda \cdot y_v \end{cases}$

La représentation paramétrique de la droite qui passe par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot x_v \\ y = y_0 + \lambda \cdot y_v \end{cases}$ Remarque : Il y en a une infinité

Exemples : i. Soit la droite (d) passant par A(2 ;-4) et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (d) est : $\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \lambda \\ y = -4 + \lambda \end{cases}$

Pente et ordonnée à l’ origine

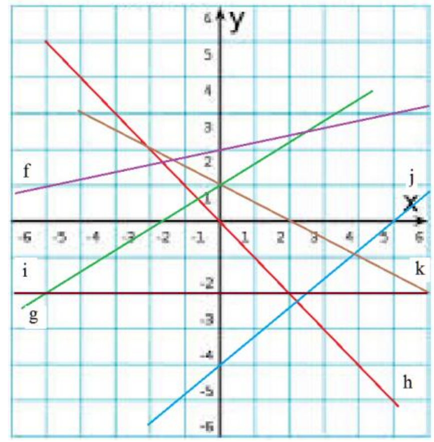
- *La pente* indique la direction d’une droite. On définit la pente que pour les droites **pas** parallèles à l’axe Ox.

- Sur l’équation fonctionnelle (y = mx+h) la pente = m
- Sur l’équation cartésienne la pente $m = -\frac{a}{b}$, (b ≠0).

- Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de la droite la pente = $\frac{y_v}{x_v}$, (xv $\neq$0)

  ➢ Si on connaît deux points sur la droite A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B),

  la pente = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, ($x_A \neq x_B$)



- Soit $d_1 : y = m_1x + h_1$ et $d_2 : y = m_2x + h_2$ deux droites
- Si $d_1 // d_2$, alors $m_1 = m_2$
- Si $d_1 \perp d_2$, alors $m_1 \cdot m_2 = -1$
- Le signe de la pente nous renseigne sur le graphe de la droite :
- M > 0 : la droite est croissante (droites f, g, j)
- M < 0 : la droite est décroissante (droites h, k)
- M = 0 : droite // à l'axe Ox (droites i)

- *<u>L'ordonnée à l' origine</u>* est l'ordonnée (y) du point au la droite coupe l'axe Oy. Donc les cordonnées de ce point est (0, y) .
- Dans l'équation fonctionnelle l'ordonnée à l' origine = h
- Dans l'équation cartésienne l'ordonnée à l' origine = $-\frac{c}{b}$
- En général l'ordonnée à l' origine est la valeur de y qu'on obtient pour x = 0.

<u>Exemples :</u>

i.

Equation	*pente*	*Ordonnée à l' origine*
y= -3x + 5	-3	5
y = 3	0	3
2x +3y – 2 = 0	-2/3	2/3
x = 2	-	-

ii. Trouver la pente de la droite qui passe par les points A(3 ; 2) , B (-2 ; 1)

La pente m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{-2-3} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

iii. Trouver la pente de la droite qui passe par les points A(-3 ; 5) , B (-2 ; 5)

La pente m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-5}{-2+3} = \frac{0}{1} = 0$, donc la droite est parallèle à l' axe Ox.

Comment on trouve l'équation d'une droite

En général pour trouver n'importe quel type d'équation d'une droite on a besoin soit de deux points, soit d'un vecteur et un point.

- *<u>Deux points :</u>* A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B)

  ➢ Si on cherche *l'équation cartésienne ou fonctionnelle* : On trouve la pente = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ = m et on remplace un de deux points sur l'équation fonctionnelle pour calculer le h.

Exemples :

i. Trouver l'équation cartésienne de la droite qui passe par les points A(2 ; -3) et B (1 ; 4)

m = $\frac{4+3}{1-2}=-7$. L'éq. fonctionnelle : y = -7x + h. On remplace les coordonnées du A :-3 = -7·2 + h ⇔ h = 11.

Alors on l'équation fonctionnelle est : y = -7x + 11.Et l'équation cartésienne est 7x + y – 11 = 0

ii. Trouver l'équation cartésienne de la droite qui passe par les points A(2 ; -3) et B (1 ; -3)

m = $\frac{-3+3}{1-2}=0$. Donc l'équation fonctionnelle est y = h ou h = -3. Alors on l'équation fonctionnelle est : y = -3 et la cartésienne y + 3 = 0

iii. Trouver l'équation cartésienne de la droite qui passe par les points A(2 ; -3) et B (2 ;5)

Dans ce cas $x_A = x_B = 2$ et donc l'équation cartésienne est x = 2.

- Si on cherche *l'équation paramétrique* : On trouve le vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et l'équation paramétrique et directement $\begin{cases} x = x_A + \lambda v_1 \\ y = y_A + \lambda v_2 \end{cases}$

Exemple :

i. Trouver l'équation paramétrique de la droite qui passe par les points A(2 ; -3) et B (1 ; 4)

le vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.L'équation paramétrique = $\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = -3+7\lambda \end{cases}$

- <u>*Un point A(x_A, y_A) et le vecteur directeur $\vec{v}$ =*</u> $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

  - Si on cherche *l'équation cartésienne ou fonctionnelle* :On trouve la pente m = $\frac{v_2}{v_1}$ et on remplace les coordonnées du point A sur l'équation fonctionnelle pour calculer le h.

Exemples :

i. L'équation cartésienne de la droite qui passe par les points A(1;4) et elle est parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

m = $\frac{3}{2}$ .L'éq. fonctionnelle est y = $\frac{3}{2}$ x + h.On remplace les coordonnées du point A :4 = $\frac{3}{2}$ ·1 + h ⇔ h = $\frac{5}{2}$

Alors on l'équation fonctionnelle est : y = $\frac{3}{2}$ x + $\frac{5}{2}$ et l'équation cartésienne est 3x - 2y +5 = 0

ii. Léquation cartésienne de la droite qui passe par les points A(-2 ; 3) et elle est parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

!!Attention m n'existe pas car le vecteur $\vec{v}$ //Oy. L'expression cartésienne de la fonction est x = x_A , x = -2.

- Si on cherche *l'équation paramétrique* : directement $\begin{cases} x = x_A + \lambda v_1 \\ y = y_A + \lambda v_2 \end{cases}$

Exemples :

i. L'équation paramétrique de la droite qui passe par les points A(1;0) et est parallèle au vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

l'équation paramétrique : $\begin{cases}x=1-2\lambda\\y=0+3\lambda\end{cases} = \begin{cases}x=1-2\lambda\\y=3\lambda\end{cases}$

ii. L'équation paramétrique de la droite qui passe par les points A(-1;3) et est parallèle au vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

l'équation paramétrique : $\begin{cases}x=-1\\y=3-\lambda\end{cases} = \begin{cases}x=1-2\lambda\\y=3\lambda\end{cases}$

- *Un point A(xA, yA) et le vecteur normal* $\vec{n}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ l'équation cartésienne est: $x_n \cdot x + y_n \cdot y + c = 0$. On remplace les coordonnées du point A pour trouver le c.

Exemples :

i. Trouver l'équation cartésienne de la droite passant par le point A(2, -3) et qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$: Directement l'équation cartésienne est : -x + 3y + c = 0. On remplace les cordonnées de A :

-2 +3·(-3) + c = 0 ⇔ c = 11. Donc -x +3y +11 = 0

Position relative de deux droites : Pour deux droites du plan on a 3 possibilités :
- *Parallèles* : aucun point d'intersection (commun)
- *Sécantes* : un point d'intersection
- *Confondues* : une infinité de points communs (elles coïncident)

- *Pour trouver la position relative :*
  - *Soit, on résoudre leur système*
  - *Soit, on calcule ses vecteurs directeurs.*
  - *Soit, on calcule ses vecteurs normaux.*

Exemples :

i. Soit d_1 : 3x -4y -12 = 0. Coupe – t- elle l'axe Ox ?
Si on cherche l'intersection d'une droite avec l'axe Ox, on pose dans l'équation **y = 0**.
Dans notre cas 3x – 12 = 0 ⇔ x = 4, donc I_x(4 ;0)

ii. La droite d_1 coupe – t – elle l'axe Oy ?
On pose **x = 0**. On obtient -4y – 12 = 0 ⇔ y = -3, donc I_y(0;-3)

iii. Soit d_1:-x + 2y +3 = 0 et d_2 : 3x - 4y -12 = 0. Quelle est la position relative de ces droites ?
On résoudre leur système :

$$\begin{cases}-x+2y+3=0\\3x-4y-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+6y+9=0\\3x-4y-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+3=0\\2y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+3=0\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2\cdot\dfrac{3}{2}+3=0\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Donc les droites sont sécantes avec point d'intersection (9, 3/2)

iv. Soit d_1 : $\begin{cases} x = 7+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \end{cases}$ et d_2: $\begin{cases} x = -4-\mu \\ y = 5+7\mu \end{cases}$. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Comme $\vec{v}_1$ n'est pas parallèle a $\vec{v}_2$, on conclut que les droites sont sécantes. On résoudre le système :

$$\begin{cases} 7+3\lambda = -4-\mu \\ -1+2\lambda = 5+7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu+3\lambda = -11 \\ -7\mu+2\lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\mu+21\lambda = -77 \\ -7\mu+2\lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu+3\lambda = -11 \\ 23\lambda = -71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 3\cdot\frac{71}{23} = -11 \\ \lambda = \frac{-71}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{28}{23} \\ \lambda = \frac{-71}{23} \end{cases}.$$

Pour cette valeur de λ on calcule $\begin{cases} x = -\frac{63}{23} \\ y = -\frac{165}{23} \end{cases}$, le point d'intersection.

v. Soit d_1 : $\begin{cases} x = 7+\lambda \\ y = -1+4\lambda \end{cases}$ et d_2: 4x - y -12 = 0.

a. La pente de d_1 est $m_1 = 4 = m_2$. Donc les droites sont soit parallèles soit confondues. On trouve un point de d_1, p.e (7 ;-1) et on remplace en d_2 : $4\cdot7 - (-1) - 12 = 17 \neq 0$ donc les droites n'ont pas de point communs et alors elles sont parallèles.

b. on remplace x et y de d_1 dans l'équation de d_2 : $4(7+\lambda) - (-1+4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 17 = 0$ *impossible* alors les droites sont parallèles.

Exemples généraux

i. *Points alignes :* Déterminer si les trois points suivants sont alignes ou non :

A(-1 ;1), B(1 ;2/9), C(4 :-1)

a. On trouve la droite qui passe par deux points parmi les trois, p.e les A et C. La pente de (AC) est $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-1}{4+1} = \frac{-2}{5}$. Donc on a l'équation : y = $\frac{-2}{5}$x + h. On remplace les cordonnées de A: $1 = \frac{-2}{5}(-1) + h \Leftrightarrow h = \frac{3}{5}$ et l'équation de la droite (AC) est $y = \frac{-2}{5}x + \frac{3}{5}$ Pour déterminer si les trois points sont alignes il suffit de remplacer les coordonnées du troisième point (i.e de B) en cette équation.

$\frac{2}{9} = \frac{-2}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$ iimpossible. Donc les points ne sont pas alignes.

b. On trouve le v. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ \frac{2}{9}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. On calcule le déterminant de deux vecteurs : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \begin{cases} =0, \text{ sont allignes} \\ \neq 0, \text{ne sont pas allignes} \end{cases}$. Dans ce cas :

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{7}{9} & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (-7/9)5 = -1/9 \neq 0$. Donc les points ne sont pas alignes.

ii. Considérez l'équation : (k-1)x + (k^2-5k+4)y – k – 7 = 0

Pour quelles valeurs de k :

a. cette équation représente – t – elle une droite ?

b. cette droite est parallèle à l'axe Ox ?

c. cette droite est parallèle à l'axe Oy ?

a. On peut écrire l'équation : (k-1)x + (k-1)(k-4)y – k – 7 = 0

Pour que cette équation soit une équation d'une droite il faut k-1 ≠ 0 ET (k-1)(k-4) ≠0.

La valeur de k qui annule tous les deux coefficients est k = 1. Donc on veut k ≠1.

b. Les droites parallèles à l'axe Ox ont la forme y = y_0.Il n'existe x dans l'équation, le coefficient de x est 0. Mais dans notre cas si k = 1 on obtient -8 = 0. Impossible. Donc il n'existe pas une valeur de k pour laquelle la droite est // Ox.

c. Les droites parallèles à l'axe Oy ont la forme x = x_0. Il n'existe y dans l'équation le coefficient de y est 0. Les deux valeurs de x qui annulent le coefficient de y sont k = 1 et k = 4. Pour k = 1 on n'a pas une droite, donc la solution est k = 4. En remplaçant on a la droite 3x = 11 ou x = 11/3.

iii. Considérez la droite donnée par d : kx + (k-3)y – k – 7 = 0. Quelle valeur faut – il donner à k pour que d soit une droite :

a. Passant par le point A(1 ;2) ? b. Ayant pente m = -0.5 c. parallèle à d_1 : x = -9

a. On remplace les cordonnées de A : k·1 + (k-3)·2 – k – 7 = 0 ⇔ k = 13/2

b. On a vu que dans l'équation cartésienne (ax + by + c = 0) la pente est egal a $-\frac{a}{b}$ > Donc dans notre cas la pente est $-\frac{k}{k-3}$. Tout d' abord on veut k ≠ 3. En plus on veut $-\frac{k}{k-3} = -\frac{1}{2}$ ⇔ 2k = k-3 ⇔ k = -3.

c. La droite x = -9 est // Oy. Il faut que le coefficient de y est 0. Donc k = 3. Quelle droite on trouve ?

iv. Soit la droite d : 3x – 4y -12 = 0. Etablir une représentation paramétrique de la droite d.

On a besoin d'un point et de vecteur directeur. Pour x = 0 on obtient y = -3. Donc un point est A (0, -3)

Le vecteur directeur est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3 - 3\lambda \end{cases}$

Une autre une représentation paramétrique de la même droite est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \end{cases}$

v. Considérer les points A(-1 ;5) et B(3 ;3) ainsi que les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Trouver les équations cartésiennes des droites suivantes :

a. d_1 passe par A et parallèle a $\vec{a}$. On trouve le vecteur normal $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ⊥ d_1. Et donc d_1 : 7x –y + c = 0. Pour trouver le c on remplace les coordonnées du point A. 7(-1) – 5 + c = 0 ⇔ c = 12. d_1 : 7x – y +12 = 0

b. d_2 : passe par B perpendiculaire à $\vec{b}$: Dans ce cas le vecteur $\vec{b}$ est le vecteur normal de la droite cherchée. Alors d_2 : -4x + 5y + c = 0. En remplaçant les coordonnées du B on obtient : -4·3 + 5·3 + c = 0 ⇔ c = -3.

c. d_3 : passe par A et B. On trouve le vecteur directeur de la droite : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc le vecteur normal $\overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et d_3 : 2x +4y + c = 0. En replaçant le point A on obtient c = -18.

d. d_4 : la médiatrice de AB. Dans ce cas le vecteur normal de d_4 est le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Un point de cette droite est le milieu du segment AB M(1 ; 4). Donc on a 4x -2y + c = 0 . On remplace les cordonnees du M : 4 - 2·4 + c = 0 ⇔ c= 4.

KALAITZI FANI 0763853810