Série 3 – Géométrie plane

Exercice 1 (révision)

1. Sur le repère ci-dessous, représenter les **points**, **droites** et **vecteurs** suivants :

   A(4 ; 2) B(-5 ; 3) $d_1: x - 2y + 11 = 0$ $d_2: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \end{cases}$

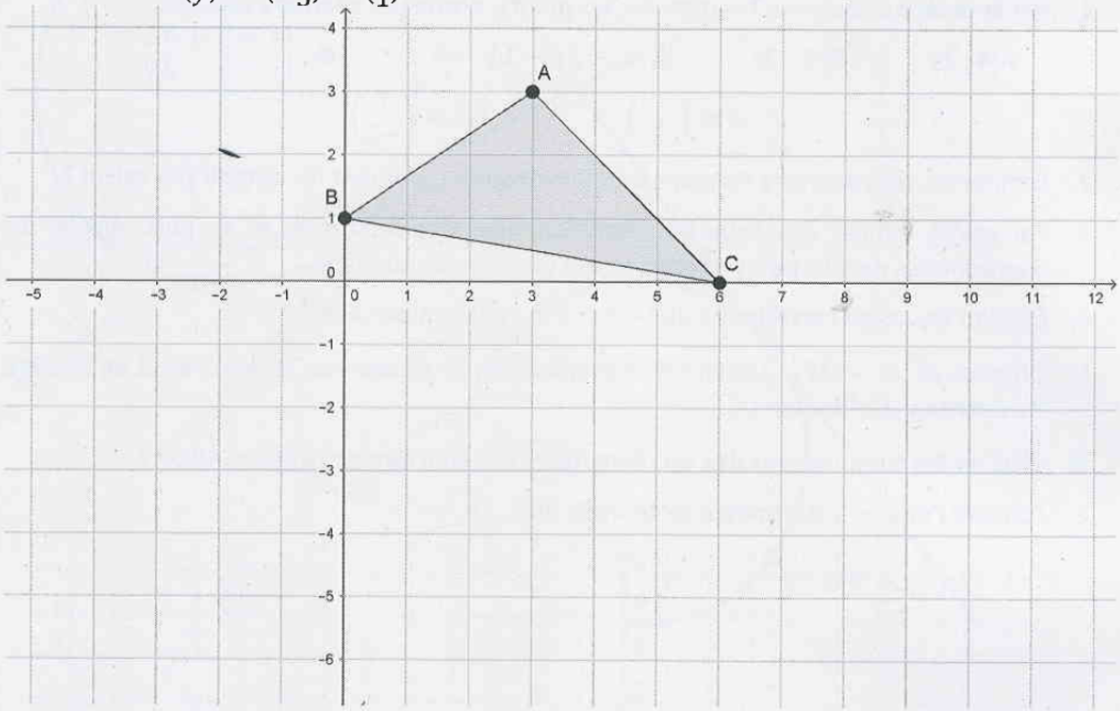
   $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Donner les **coordonnées** du point D (lire le dessin). Comment les obtenir par calcul ?
3. Par calcul, donner des **équations fonctionnelles** des droites d_1 et d_2 puis calculer les coordonnées de leur **point d'intersection** que l'on nommera K.
4. Établir l'**équation cartésienne** de la droite d_3 passant par A et B.
5. On pose $\overrightarrow{AC} = -11\vec{e_1}$: trouver les **composantes** de ce vecteur, le dessiner et en déduire les coordonnées du point C.
6. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que dire de la figure ABCD ?
7. Calculer l'**aire** et le **périmètre** du triangle ABD.

Exercice 2 (révision)

1. Sur le système d'axes ci-dessous, dessiner soigneusement :

$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t$ $\mathcal{D}:\ 2x - y \leq 0$



2. Calculer les coordonnées du **point d'intersection** I formé par la droite d_1 et la frontière de la zone $\mathcal{D}$ *(coordonnées en fractions irréductibles)*.
3. Calculer le **périmètre** du triangle ABC et donner les coordonnées de son **centre de gravité**.
4. Établir un **système d'inéquations** dont l'ensemble de solutions correspond exactement à l'intérieur du triangle ABC.
5. Déterminer les coordonnées d'un point C' sur l'axe horizontal tel que la **surface** du triangle ABC' soit d'exactement $30\, u^2$.

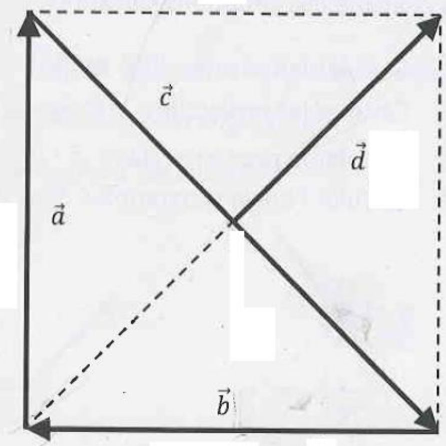
Exercice 3 (révision)

Soients les points $A(43\,;\ -11)$ et $B(47\,;\ 1)$

1. Donner une **équation paramétrique vectorielle** de la droite AB ainsi qu'une **équation cartésienne** de cette même droite, puis dire par calculs si $(67\,;\ 61)$ est sur cette droite.
2. Déterminer les coordonnées du **milieu** M du segment AB.
3. Donner une équation de la **médiatrice** du segment AB.

Exercice 4

Le carré ci-contre a un côté de 6 unités.



1. Déterminer les produits scalaires suivants par la méthode **géométrique** (multiplication de la norme de l'un par la norme de la projection orthogonale de l'autre) :

   $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{c} =$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{d} =$

   $\vec{b}\cdot\vec{c} =$ $\quad$ $\vec{b}\cdot\vec{d} =$ $\quad$ $\vec{c}\cdot\vec{d} =$

2. Déterminer les composantes de chacun de ces 4 vecteurs.
3. Vérifier les produits scalaires du point 1) en travaillant cette fois avec les composantes (méthode **algébrique**).
4. Calculer une troisième fois ces produits scalaires en décidant cette fois-ci que la longueur du côté du carré est k.

Exercice 5

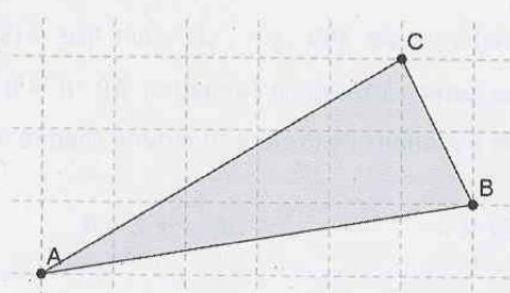
On donne 3 vecteurs $\vec{a} = \binom{7}{2}$; $\vec{b} = \binom{3}{8}$ et $\vec{c} = \binom{-4}{3}$

Calculer la valeur des produits scalaires suivants :

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$	2) $\vec{b}\cdot\vec{a}$	3) $3\vec{a}\cdot\vec{b}$
4) $\vec{a}\cdot 3\vec{b}$	5) $\vec{a}\cdot\vec{c}$	6) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$
7) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	8) $\vec{a}+(\vec{b}\cdot\vec{c})$	

Exercice 6

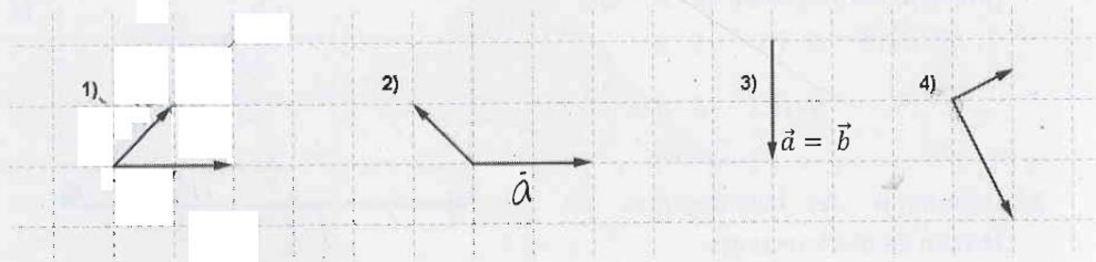
Calculer les angles de ce triangle :



Exercice 7

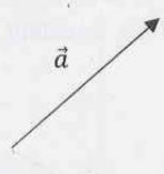
Dans chacune des situations suivantes :

1. Calculer les normes $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$.
2. Calculer les projections orthogonales a' et b'.
3. Calculer le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
4. Calculer l'angle séparant les deux vecteurs.



Exercice 8

1. Dessiner ci-dessous un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$:



2. Dessiner ci-dessous l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n} = 0$

3. Soient un point variable $\mathrm{P}(x\,;y)$ et un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: exprimer sous forme cartésienne l'équation $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n} = 0$.
4. Soient un point variable $\mathrm{P}(x\,;y)$, un point fixe A(3 ; 1) et un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$: exprimer sous forme cartésienne l'équation $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$ et illustrer la situation.
5. Voici plusieurs équations de droites ; donner à chaque fois un vecteur normal :

$d_1 : x - 5y = 7$ $\qquad$ $d_2 : x + y = 0$ $\qquad$ $d_3 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{3}$

$d_4 : 5x = 12$ $\qquad$ $d_5 : -y = 7$ $\qquad$ $d_6 : 5x = 4y - 3$

$d_7 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}\lambda$ $\qquad$ $d_8 : x = 0$ $\qquad$ $d_9 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -8 - 7t \end{cases}$

Exercice 9

Considérer les vecteurs $\vec{a} = \binom{5}{2}$ et $\vec{b} = \binom{x}{9}$

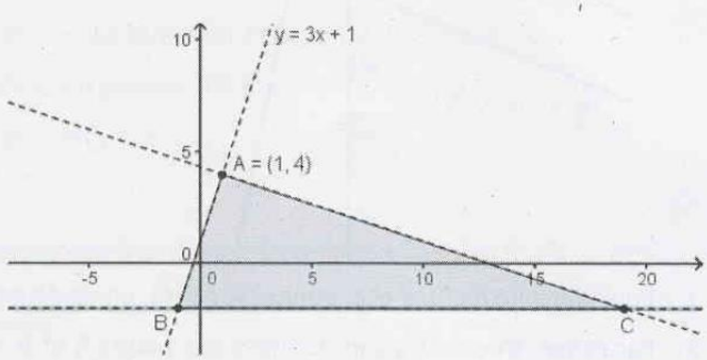
1. Dans le cas particulier où $x = 2$: calculer leur produit scalaire et l'angle qui les sépare.
2. Quelle valeur donner à x pour que ces vecteurs forment un angle droit ?
3. Quelle valeur donner à x pour que ces vecteurs soient parallèles ?

Exercice 10

Si $\binom{k+3}{4} \perp \binom{k-5}{3}$, que vaut k ?

Exercice 11

L'illustration ci-contre présente un triangle rectangle en A. Le côté BC est horizontal, l'équation du côté AB est donnée ainsi que les coordonnées du point A. L'ordonnée des points B et C vaut -2.

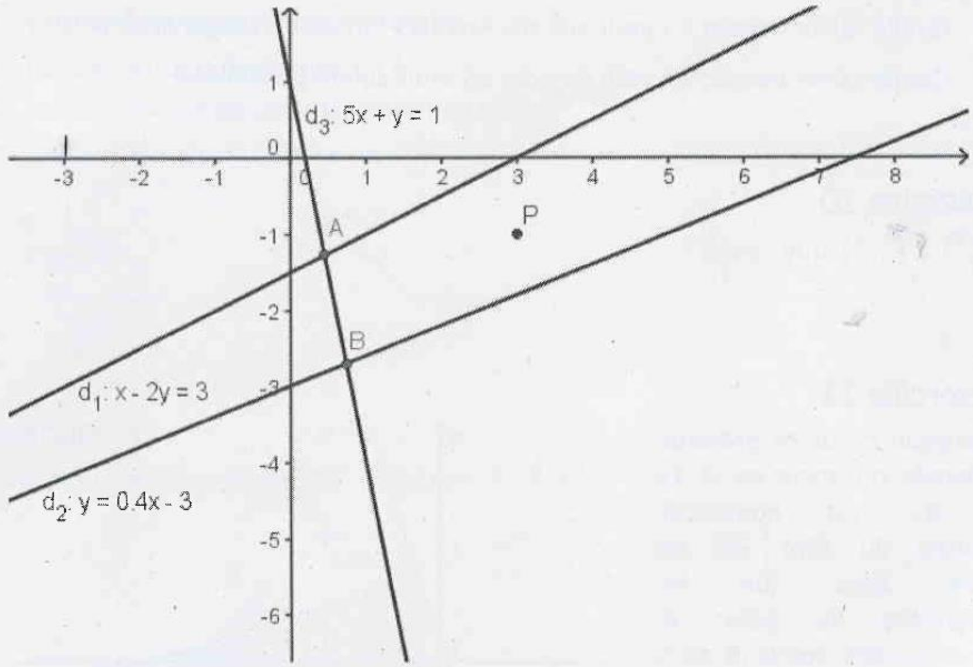


Par calcul, **retrouver toutes les informations manquantes** (coordonnées des sommets, équations des côtés, mesure des angles, longueur des côtés, périmètre et surface) !

Exercice 12

Soient les 3 droites suivantes :

$d_1: x - 2y = 3$ $d_2: y = \frac{2}{5}x - 3$ $d_3: 5x + y = 1$



1. Pour chacune d'entre-elle, donner la ***pente***, un ***vecteur directeur*** et un ***vecteur normal***.
2. Par calcul, trouver les coordonnées des points A et B ainsi que la distance séparant ces deux points.
3. Calculer l'angle séparant les droites d_1 et d_2.
4. Nommons C le point d'intersection de d_1 et d_2 : calculer la surface du triangle ABC.

Ajoutons à présent le point $P(3\ ;\ -1)$:

5. Donner l'équation d'une **perpendiculaire à d_1** passant par P ; nommons-la p_1. Esquisser cette droite sur le dessin.
6. Calculer les coordonnées du point P' situé à l'intersection de d_1 et de p_1.
7. Calculer la distance séparant P de P'.

Exercice 13

Considérer les points A(-1 ; 5) et B(3 ; 3) ainsi que les vecteurs $\vec{a} = \binom{1}{7}$ et $\vec{b} = \binom{-4}{5}$

Trouver <u>**rapidement**</u> des équations cartésiennes des 6 droites suivantes :

d_1 : passe par A, parallèle $\vec{a}$ d_2 : passe par A, perpendiculaire à $\vec{a}$

d_3 : passe par B, parallèle $\vec{b}$ d_4 : passe par B, perpendiculaire à $\vec{b}$

d_5 : passe par A et B d_6 : médiatrice du segment AB

Exercice 14

Déterminer les distances séparant le(s) point(s) de la droite...

droite	point(s)	méthode à utiliser
$-x + 2y = 6$	A(8 ; -3)	droite perpendiculaire
$2x + 9y = 23$	B(3 ; -2) et C(11 ; 2)	produit scalaire
$3x - 2y = -2$	D(2 ; 2) et E(-7 ; 10)	équation hessienne
passant par (-3 ; 1) et (3 ; 4)	F(-2 ; 5)	produit scalaire
$17x + y = 55$	G(-8 ; -4)	équation hessienne

Exercice 15

Considérer la droite d'équation $d : 5x + 2y - 9 = 0$.

1. Trouver un vecteur normal, un vecteur directeur et la pente de cette droite.
2. Établir l'équation d'une parallèle à d passant par le point $P(-4 ; 7)$.
3. Quelle distance sépare d de sa parallèle ?

Exercice 16

Trouver la distance de chacun des points suivants à la droite *d* d'équation $d: 3x - 4y = 12$.
Classer ces points en trois catégories :

1. Ceux qui sont au-dessus de la droite.
2. Ceux qui sont sur la droite.
3. Ceux qui sont en dessous de la droite.

A(8 ;1) B(-5 ;12) C(4 ;0) D(6 ;-2) E(130 ;190) O(0 ;0)

Exercice 17

Soit la droite $d: 12x - 3y + 5 = 0$

1. Quelle est la distance de l'origine à cette droite ?
2. Trouver l'équation de toutes les droites parallèles à *d*, à distance de $\frac{5}{\sqrt{153}}$ de *d*.

Exercice 18

1. Tracer le triangle $A(2; 1)$, $B(7; 2)$ et $C(5; 6)$
2. Tracer et calculer l'équation de la médiane, de la médiatrice et de la hauteur par rapport au point A.
3. Tracer et calculer l'équation de la bissectrice issue du point A. Indice : la bissectrice entre deux droites d et d' est l'ensemble des points P tels que $\delta(P, d) = \delta(P, d')$.

Exercice 19 Cercles

1. Donner l'équation cartésienne d'un cercle de centre $K(3 ; -5)$ et de rayon $r = 6$; donner ensuite un système d'équations paramétriques pour ce même cercle et utiliser le système pour dresser un tableau de valeurs (minimum 5 points).

2. a. Trouver le centre K et le rayon du cercle d'équation $(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^2+(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2-\mathbf{121}=\mathbf{0}$
   b. Calculer P_1 et P_2 : les intersections de ce cercle avec l'axe Ox.
   c. Que valent $\|\overrightarrow{KP_1}\|$ et $\|\overrightarrow{KP_2}\|$?
3. Trouver le centre K et le rayon du cercle d'équation $\boldsymbol{x^2-6x+y^2+4y-12=0}$.
4. Calculer les points d'intersections entre le cercle d'équation $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2=25}$ et la droite d'équation $\boldsymbol{7x-y+12=0}$.
5. Déterminer l'équation de la droite t : tangente au cercle précédent au point P(5 ; -3).

Exercice 20

Trouver le centre et le rayon de chacun des cercles suivants :

1. $x^2+(y+7)^2=81$ 2. $x^2+y^2-2x-14y+34=0$ 3. $x^2+y^2-2x-3=0$

Exercice 21

Considérons les cercles :

$$C_1: x^2+y^2+2x-8y-3=0 \quad \text{et} \quad C_2: (x-5)^2+(y-3)^2=\frac{5}{2}$$

1. Tracer ces cercles dans un système d'axes
2. Les cercles se coupent-ils ? (Justifiez le par calcul)

Exercice 22

On considère les points $A(7\,;\,-1)$, $B(6\,;\,4)$ et $C(4\,;\,-4)$. Le but est d'établir l'équation de l'unique cercle passant par ces trois points.

1. Établir l'équation de la médiatrice de AB (m_{AB}) ainsi que l'équation de la médiatrice de BC (m_{BC}).
2. Calculer l'intersection $m_{\mathrm{AB}} \cap m_{BC}$: il s'agit du centre du cercle recherché !
3. Trouver le rayon du cercle et établir son équation.
4. Vérifier que les points A, B et C appartiennent bien au cercle trouvé.

Exercice 23

Déterminer les équations cartésiennes des cercles suivants :

1. Centré à l'origine et de rayon 4 ;
2. De centre C(4 ; -2) et de rayon 3 ;
3. De centre C(5 ; -6) et passant par l'origine ;
4. De centre C(-4 ; 5) et passant par le point A(1 ; -2) ;
5. De diamètre AB avec A(3 ; 2) et B(-1 ; 6) ;
6. Centré à l'origine et tangent à la droite $3x+4y-15=0$;
7. De centre C(1 ; -1) et tangent à la droite $5x-12y+9=0$;
8. Passant par les points A(3 ; 1) et B(-1 ; 3) et ayant son centre sur la droite $3x-y-2=0$;
9. Passant par les points A(-1 ; 5) , B(-2 ; -2) et C(5 ; 5).

Exercice 24

Trouver les points d'intersection des deux cercles suivants :

$$C_1: (x+1)^2 + (y-10)^2 = 25 \quad \text{et} \quad C_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$$

Exercice 25

Soit le cercle C centré en A(-1 ;5) et de rayon $r = \sqrt{13}$.

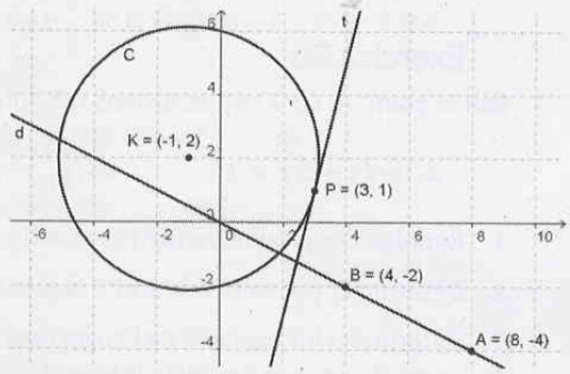
- Montrer que le point B(2 ;3) appartient à C.
- Trouver l'équation cartésienne de la tangente à C en B.

Exercice 26

Quelle est la position relative de $C_1: (x-2)^2 + (y-14)^2 = 169$ et $C_2: (x-10)^2 + (y-8)^2 = 9$?

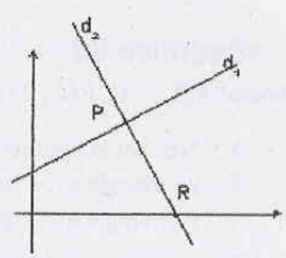
Exercice 27

Déterminer les équations et les intersections des objets représentés sur ce schéma :



Exercice 28

1. Quelles sont les coordonnées des points de l'axe O_X situés à distance de 4 de la droite $y = -\frac{12}{5}x + 1$. (Faire un graphe de la situation)
2. Trouver les équations des bissectrices des droites $d_1: 7x - y = 0$ et $d_2: x + y - 2 = 0$
3. Trouver le centre et le rayon des cercles d'équation :
   a. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$ b. $4x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 93 = 0$
4. Trouver les équations des tangentes au cercle C de centre $K(1\,;3)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ qui sont parallèles à $\vec{v} = \binom{2}{-5}$.
5. Considérons les deux cercles suivants :
   $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ et $C_2: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$
   a. Déterminer le rayon et le centre de chaque cercle.
   b. Les cercles se coupent-ils ? Si oui, déterminer les coordonnées des points d'intersections.
6. Soit $P(6;4)$, $d_1: x - 6y + 18 = 0$ et $d_1 \perp d_2$. Calculer $\|\overrightarrow{PR}\|$ selon le schéma ci-contre.

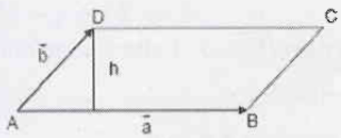


7. Quelle est l'équation du cercle circonscrit au trapèze $K(0;2), L(0;-1), M(6;5)$ et $N(3;5)$.

EXERCICES EN PLUS

Exercice 29

Sur le parallélogramme ci-contre, on connaît les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



1. Calculer la surface du parallélogramme ABCD.
2. Trouver la longueur de la base AB.
3. Déduire de 1 et de 2 ci-dessus la hauteur h du parallélogramme.

Exercice 30

Soit le point $A(6\,;\,2)$ et les droites suivantes :

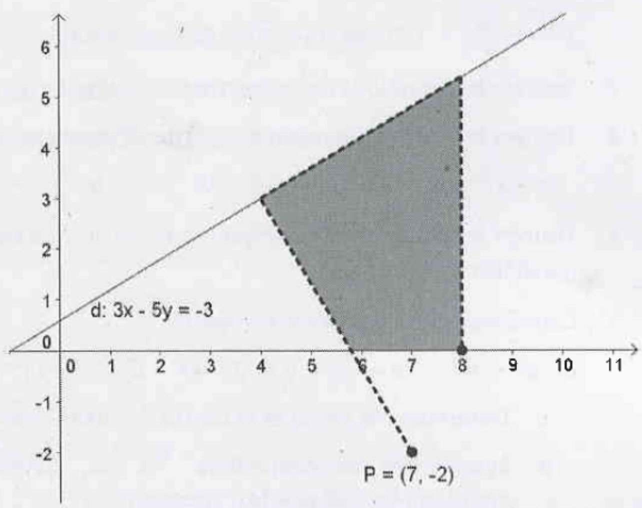
$$d_1\colon -2x + 5y = 19 \qquad d_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad d_3\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{4}$$

1. Représenter graphiquement la situation.
2. Déterminer par calculs la droite la plus proche du point A .
3. Déterminer les mesures de l'angle aigu et de l'angle obtus formés par l'intersection de d_1 et de d_2 et reporter cette information sur le dessin.

Exercice 31

Un promeneur part du point P et se rend, par le plus court chemin, sur la droite d ; il suit alors cette droite jusqu'au point d'abscisse 8 puis redescend verticalement sur l'axe Ox.

1. Quelle est la longueur du chemin ainsi parcouru ?
2. Une fois arrivé à destination, à quelle distance se trouve-t-il de la droite d ?
3. Et quelle distance le sépare de son point de départ ?



Exercice 32

Soient $A(1\,;-1), B(5\,;2)\ et\ C(-2\,;7)$

1. Trouver la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
2. Le triangle est-il isocèle ?
3. Le triangle est-il rectangle ?

Exercice 33

1. Trouver l'équation de la droite m passant par F(3 ;2) et perpendiculaire à $d: 4x - 3y + 2 = 0$.
2. Laquelle des deux droites $d_1: 2x - 5y + 7 = 0$ et $d_2: 4x - 5y + 5 = 0$ est-elle la plus proche de l'origine ?
3. Soit la droite $T: 3x + 5y - 2 = 0$.Trouver l'équation d'une droite parallèle à T, à distance 10 de T, et du même côté de T que le point A(-2 ;1)

Exercice 34

Soient les droites $d_1: 2x - 3y + 23 = 0$ et $d_2: 4x + 3y + 19 = 0$. Trouver un point B sur d_2 dont la distance à d_1 vaut $\frac{18}{\sqrt{13}}$

Exercice 35

Calculer les points de la courbe $c: y = \frac{1}{x}$ situés à distance $\frac{6}{5}$ de la droite $d: 3x + 4y - 2 = 0$

Exercice 36

On considère le triangle ABC dont les sommets sont $A(0\,;6), B(4\,;3)\ et\ C(-1\,;0)$

1. Illustrer ce triangle sur un croquis
2. Donner des équations cartésiennes des droites suivantes :
   d_1 : côté BC
   d_2 : médiatrice du côté AB
   d_3 : médiane issue de C
   d_4 : hauteur du triangle issue de A
3. Calculer la surface du triangle avec le déterminant
4. Calculer cette même surface par la géométrie élémentaire $\left(S = \frac{b \cdot h}{2}\right)$.

Exercice 37

Considérons la droite $y = mx$ et le cercle $(x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$.

Pour quelle(s) valeur(s) de m sont-ils tangents ?

Exercice 38

On considère le cercle de rayon 5 centré en (2 ; 3).

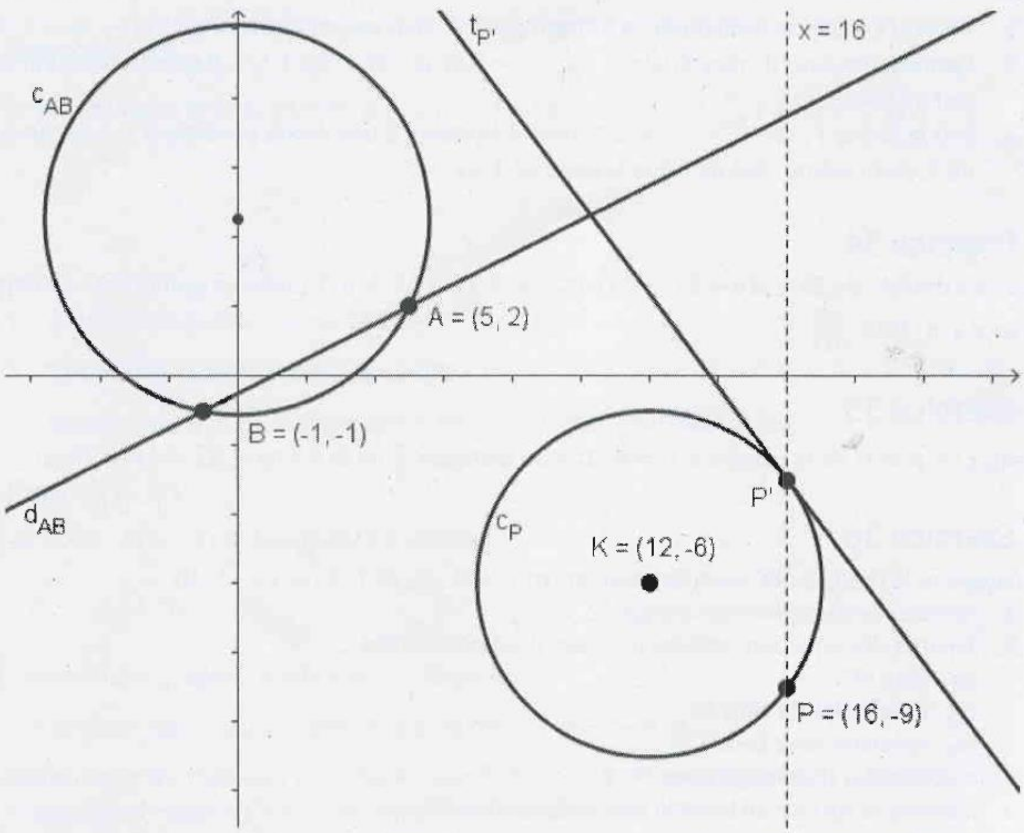
1. Vérifier que $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y = 24$ est bien une équation de ce cercle !
2. Donner l'équation de la tangente à ce cercle au point (6 ; 0).
3. Chercher la distance séparant ce cercle de la droite $x + 3y - 58 = 0$; la droite coupe-t-elle le cercle ?
4. Chercher un point du cercle d'abscisse égale à 4, ainsi que le point diamétralement opposé.

Exercice 39

Soient les points $A(2;3) et\ B(5;4)$.

1. Donner l'équation du cercle C_1 ayant pour diamètre AB.
2. Donner l'équation du cercle C_2 passant par $A\ et\ B$ et ayant son centre sur la droite $y = -1$

Exercice 40



Donner les équations ou les coordonnées des objets géométriques suivants :

1. La droite d_{AB} passant par les points A et B ;
2. Le cercle C_{AB} passant par les points A et B, dont le centre se trouve sur l'axe Oy ;
3. Le cercle C_P de centre K passant par le point P ;
4. Le point P', se trouvant sur le cercle C_P et sur la verticale $x = 16$;
5. La droite $t_{P'}$: tangente au cercle C_P avec P' pour point de contact.

Répondre ensuite aux trois questions suivantes :

a. Quelle distance sépare les deux cercles ?

b. Quelle distance sépare Ox du cercle C_P ?

c. Quelle distance sépare le centre K de la droite d_{AB} ?