

Chapitre 3

Statistique et Probabilités

Exercice 1. *De combien de manières pouvons-nous aligner 4 boules de couleurs différentes ?*

Exercice 2. *Combien faut-il organiser de matchs pour que 5 équipes s'affrontent toutes une fois l'une contre l'autre ?*

Exercice 3. *De combien de manières différentes pouvons-nous répartir un groupe de 5 personnes autour d'une table ronde ?*

Exercice 4. *Combien de mots différents pouvons-nous former à partir des lettres du mot ELEVE ?*

Exercice 5. *Un restaurant propose une carte de menus comportant trois entrées, cinq plats principaux et 4 desserts. Combien de menus différents existe-t-il ?*

Exercice 6. Plus difficile : *Combien de comités de classe (un(e) président(e), un(e) vice-président(e) et un(e) secrétaire) différents pouvons-nous former dans une classe de 22 élèves ?*

Exercice 7.

a) *Écrivez le calcul du premier exercice d'introduction sous la forme d'une factorielle.*

b) *Quel exercice d'introduction peut se résoudre par le calcul $\frac{5!}{3!}$?*

Exercice 8.

a) *Calculez « à la main » puis vérifiez à la calculatrice les valeurs des expressions ci-dessous :*

$$1) 4 \cdot 3! \qquad 2) \frac{8!}{8} \qquad 3) \frac{12!}{9!} \qquad 4) \frac{9!}{10!} \qquad 5) \frac{12!}{(12-4)!4!}$$

b) *Simplifiez au maximum les expressions suivantes :*

$$1) \frac{n!}{(n-1)!} \qquad 2) \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \qquad 3) \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exercice 9.

- a) *De combien de manières différentes pouvons-nous asseoir 10 personnes sur 10 chaises ?*
- b) *Vous organisez un contre-la-montre à vélo avec 500 participants. Combien d'ordres de départ différents sont-ils possibles ?*
- c) *Dans votre classe, de combien de manières différentes les enseignants peuvent-ils rendre une épreuve ?*
- d) *Combien d'ordres de naissance sont-ils possibles dans une famille de 7 enfants ?*

Exercice 10.

- a) *Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes et 5 boules rouges. Nous extrayons toutes les boules de l'urne. Combien de tirages différents existe-t-il ?*
- b) *Combien de mots différents pouvons-nous former en utilisant les lettres du mot GAUSS et avec celles du mot ABRACADABRA ?*
- c) *On dispose de 5 disques noirs, 3 disques rouges, 3 disques bleus et 2 disques blancs. De combien de manières différentes pouvons-nous aligner ces 13 disques sur un rang ?*

Exercice 11.

- a) *Huit personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de cinq places. Combien y a-t-il de possibilités ?*
- b) *Combien de mots de quatre lettres distinctes pouvons-nous former avec les lettres du mot DIPLOME ?*
- c) *Combien de podiums différents existe-t-il lors d'une course comprenant 50 participants ?*
- d) *Combien de photos différentes de 7 personnes alignées peut-on faire dans cette classe ?*

Exercice 12.

- a) *Combien de mots de trois lettres pouvons-nous former avec les lettres du mot DIPLOME si les répétitions sont admises ?*
- b) *Combien de nombres contenant cinq chiffres entre 1 et 9 pouvons-nous former si les répétitions sont admises ?*
- c) *Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?*

Exercice 13.

- a) *Combien d'équipes différentes de 5 personnes pouvons-nous former dans un groupe de 21 personnes ?*
- b) *Combien de mains différentes de six cartes pouvons-nous obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?*

Exercice 14.

a) *M. Jones va disposer 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de mathématiques, trois de chimie, deux d'histoire et un d'anglais. M. Jones aimerait ranger ses livres de façon à ce que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?*

b) *Justine a 5 pullovers rouges, 4 pullovers verts et 2 pullovers bleus. De combien de manières différentes peut-elle les pendre dans sa penderie si elle souhaite les pendre groupés par couleur et dans l'ordre rouges, verts, bleus ?*

c) *Même question si Justine souhaite seulement les pendre groupés par couleur ?*

Exercice 15. *Quel est le nombre d'ordres d'arrivée possibles des 3 premiers chevaux dans une course à laquelle participent 7 chevaux ?*

Exercice 16.

a) *Combien de mots différents pouvons-nous former avec toutes les lettres du mot SUISSE.*

b) *Combien de ces permutations contiennent 3 S adjacents ?*

c) *Combien de ces permutations commencent par S et se terminent par E ?*

Exercice 17. *Combien de nombres pouvons-nous composer à l'aide de trois cartons comportant les chiffres 2, 4 et 7 ? Nous plaçons les cartons côte à côte.*

Exercice 18. *En supposant qu'il n'y a pas de répétition, combien de nombres de 3 chiffres pouvons-nous former à l'aide des chiffres 2, 3, 5, 6 et 7 ?*

Exercice 19. *Un étudiant doit choisir 2 cours à options parmi les 12 que propose son école.*

a) *Combien de choix différents peut-il faire ?*

b) *Combien de choix différents peut-il faire s'il doit encore indiquer une préférence parmi ces deux cours ?*

Exercice 20. *Un signal est constitué de 6 pavillons alignés. Combien de signaux différents peut-on former à l'aide de 4 pavillons rouges et 2 pavillons bleus.*

Exercice 21. *Nous devons désigner 7 personnes, parmi 10 hommes et 10 femmes, pour peler des pommes de terre.*

a) *Combien de groupe différents pouvons-nous constituer ?*

b) *Combien de groupe différents pouvons-nous constituer si nous devons choisir 4 hommes et 3 femmes.*

Exercice 22. *Un questionnaire comporte 12 questions. A chacune de ces questions, on peut répondre par oui ou par non. Déterminez le nombre de manières distinctes de remplir ce questionnaire.*

Exercice 14.

a) *M. Jones va disposer 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de mathématiques, trois de chimie, deux d'histoire et un d'anglais. M. Jones aimerait ranger ses livres de façon à ce que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?*

b) *Justine a 5 pullovers rouges, 4 pullovers verts et 2 pullovers bleus. De combien de manières différentes peut-elle les pendre dans sa penderie si elle souhaite les pendre groupés par couleur et dans l'ordre rouges, verts, bleus ?*

c) *Même question si Justine souhaite seulement les pendre groupés par couleur ?*

Exercice 15. *Quel est le nombre d'ordres d'arrivée possibles des 3 premiers chevaux dans une course à laquelle participent 7 chevaux ?*

Exercice 16.

a) *Combien de mots différents pouvons-nous former avec toutes les lettres du mot SUISSE.*

b) *Combien de ces permutations contiennent 3 S adjacents ?*

c) *Combien de ces permutations commencent par S et se terminent par E ?*

Exercice 17. *Combien de nombres pouvons-nous composer à l'aide de trois cartons comportant les chiffres 2, 4 et 7 ? Nous plaçons les cartons côte à côte.*

Exercice 18. *En supposant qu'il n'y a pas de répétition, combien de nombres de 3 chiffres pouvons-nous former à l'aide des chiffres 2, 3, 5, 6 et 7 ?*

Exercice 19. *Un étudiant doit choisir 2 cours à options parmi les 12 que propose son école.*

a) *Combien de choix différents peut-il faire ?*

b) *Combien de choix différents peut-il faire s'il doit encore indiquer une préférence parmi ces deux cours ?*

Exercice 20. *Un signal est constitué de 6 pavillons alignés. Combien de signaux différents peut-on former à l'aide de 4 pavillons rouges et 2 pavillons bleus.*

Exercice 21. *Nous devons désigner 7 personnes, parmi 10 hommes et 10 femmes, pour peler des pommes de terre.*

a) *Combien de groupe différents pouvons-nous constituer ?*

b) *Combien de groupe différents pouvons-nous constituer si nous devons choisir 4 hommes et 3 femmes.*

Exercice 22. *Un questionnaire comporte 12 questions. A chacune de ces questions, on peut répondre par oui ou par non. Déterminez le nombre de manières distinctes de remplir ce questionnaire.*

Exercice 23. *De combien de façon différentes peut-on disposer un groupe de 8 personnes sur une rangée de 8 chaises ?*

Exercice 24. *Un hôtel est composé de cinq chambres à lit simple. Dix voyageurs arrivent simultanément. De combien de façons différentes peut-on répartir ces dix voyageurs dans les cinq chambres, cinq d'entre eux devant repartir ?*

Exercice 25.

a) *De combien de façons différentes 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc ?*

b) *Et si les garçons s'assoient les uns à côté des autres ?*

c) *Et si les filles aussi aimeraient s'asseoir les unes à côté des autres ?*

Exercice 26. *Lors d'un examen, vous devez répondre à 8 questions sur un total de 10.*

a) *Combien de choix avez-vous ?*

b) *Combien de choix avez-vous si vous devez répondre aux 3 premières questions ?*

c) *Combien de choix avez-vous si vous devez répondre à 4 des 5 premières questions ?*

d) *Combien de choix avez-vous si vous devez répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?*

Exercice 27. *Supposons qu'une plaque d'immatriculation contienne deux lettres différentes suivies de trois chiffres dont le premier est non nul. Combien de plaques différentes pouvons-nous imprimer ?*

Exercice 28. *De combien de manières pouvons-nous tirer l'une après l'autre, trois cartes d'un jeu de 52 cartes...*

a) *...si le tirage se déroule avec remise ?*

b) *...si le tirage se déroule sans remise ?*

Exercice 29. *Combien de dominos existent-ils ? Rappel : un domino est composé de deux parties contenant chacune de 0 à 6 points.*

Exercice 30. *Au TOTOgoal, nous parions sur l'issue de 13 matchs qui peut se solder par une victoire de l'équipe 1, un match nul ou une victoire de l'équipe 2. Combien pouvons-nous faire de pronostics au total ?*

Exercice 31. *Dans une grille rectangulaire de 3 lignes et 5 colonnes, de combien de façons différentes pouvons-nous placer...*

a) *5 jetons rouges s'il doit y avoir un jeton par colonne ?*

b) *5 jetons de couleurs différentes, un dans chaque colonne ?*

c) *5 jetons rouges (pas plus d'un jeton par case) ?*

Exercice 32. Nous lançons un dé une seule fois et considérons les événements suivants :

$$A = \{2\} \quad B = \{2; 4; 6\} \quad C = \{1; 2\} \quad D = \{1; 2; 4; 6\} \quad E = \{3; 5\}$$

Déterminez les événements suivants :

$$B \cap C \quad A \cup B \quad B \cup C \quad C \cap E \quad \bar{A} \quad B \setminus C \quad \bar{A} \cup D \quad \bar{A} \cap D$$

Exercice 33. Soient A et B deux événements. Exprimez, puis représentez dans un diagramme de Venn les événements suivants :

- 1) A mais pas B 2) ni A , ni B 3) A ou B , mais pas les deux.

Exercice 34. Quel est l'univers correspondant aux épreuves suivantes ?

- a) Jouer à « pile ou face » deux fois de suite ;
b) Jeter deux dés ;
c) Lancer une pièce de monnaie jusqu'à ce que face apparaisse.

Exercice 35. Une pièce de monnaie et un dé sont lancés.

- a) Décrivez l'univers de l'expérience.
b) Décrivez explicitement les événements suivants :
★ $A =$ « face et un nombre pair apparaissent » ;
★ $B =$ « un nombre premier apparaît » ;
★ $C =$ « pile et un nombre impair apparaissent ».
c) Exprimez de manière explicite les événements suivants :
★ A et B se produisent ;
★ B et C se produisent ;
★ seul B se produit.
d) Parmi A , B et C , y a-t-il des événements incompatibles ?

Exercice 36. Une expérience est menée durant laquelle le nombre d'apparition de chaque face d'un dé est noté au fur et à mesure des lancers de ce dé :

Nombre de lancers \ Faces	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6'000	953	1053	1027	1028	982	957
60'000	9880	9989	9888	10206	10190	9847
120'000	19759	20065	19795	20232	20213	19936

a) Calculez la fréquence d'apparition de chaque face après 600 lancers ainsi que la somme de ces fréquences.

b) Calculez la fréquence d'apparition de la face 2 durant chaque étape de l'expérience puis déterminez la probabilité d'obtenir la face 2 lors d'un lancer de dé.

c) Pour le nombre de lancers égal à 6'000, considérons les événements $A =$ « obtenir un nombre pair » et $B =$ « obtenir un nombre plus grand que 3 ». Calculez la fréquence des événements A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ puis exprimez la fréquence de $A \cup B$ en fonction des 3 autres fréquences calculées à ce point.

Exercice 37. Dans le canton, il y a 150'000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 150'000. Quelle est la probabilité qu'en rencontrant une voiture immatriculée dans ce canton, son numéro de plaque commence par 1 (le numéro 1 étant compris) ?

Exercice 38. Une enquête effectuée dans un échantillon représentatif de la population suisse a révélé qu'il y a une probabilité de :

- ★ 0,8 pour qu'un Suisse aime les oranges ;
- ★ 0,4 pour qu'un Suisse aime les citrons ;
- ★ 0,3 pour qu'un Suisse aime les oranges et les citrons.

Quelle est alors la probabilité pour qu'un Suisse :

- a) aime les oranges mais pas les citrons ?
- b) aime les oranges ou les citrons ?
- c) n'aime ni les oranges, ni les citrons ?

Exercice 39. Déterminez la probabilité des événements suivants :

- a) Un nombre pair apparaît lors du lancer d'un dé honnête.
- b) Face apparaît au moins une fois lors du lancer de 3 pièces.
- c) Une bille rouge est tirée aléatoirement d'un sac contenant 4 billes blanches, 3 rouges et 5 bleues.

Exercice 40. Dans un groupe de dix élèves, trois sont gauchers. Deux élèves sont choisis au hasard. Quelle est la probabilité que :

- a) les deux soient gauchers ?
- b) aucun des deux ne soit gaucher ?
- c) au moins l'un d'eux soit gaucher ?
- d) exactement l'un d'eux soit droitier ?

Exercice 41. Un dé rouge et un dé noir sont lancés. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) un 3 rouge et un 5 noir ?
- b) un 3 et un 5 ?
- c) deux 3 ?
- d) une somme paire ?
- e) le même résultat sur les deux dés ?
- f) un total de 8 ?
- g) au moins un 6 ?
- h) aucun 6 ?

Exercice 42. Une pièce de monnaie est lancée quatre fois de suite, en supposant que les 16 issues de cette épreuve sont équiprobables (pièce non truquée !). Déterminez la probabilité des événements suivants :

- a) face apparaît exactement une fois.
- b) face apparaît exactement 2 fois.
- c) face apparaît au moins deux fois.
- d) face apparaît lors des lancers 2 et 3.
- e) face n'apparaît que lors des lancers 2 et 3.

Exercice 43. Un habitant du Vignoble a découvert la règle suivante pour prévoir le temps qu'il fera :

- ★ s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse encore beau le lendemain est de 0,8 ;
- ★ s'il fait vilain un jour, la probabilité qu'il fasse encore vilain le lendemain est de 0,6.

- a) S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau après-demain ?
- b) S'il fait vilain aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau au moins un des trois prochains jours ?

Exercice 44. Nous avons sorti d'un jeu de cartes les 4 as et nous avons distribué au hasard ces cartes à deux personnes A et B (deux cartes par personne). Calculez la probabilité des événements suivants :

- a) A possède l'as de pique.
- b) A possède les deux as noirs.
- c) A possède les deux as noirs sachant qu'il possède l'as de pique.
- d) A possède l'as de pique sachant qu'il possède au moins l'un des deux as noirs.
- e) A possède l'as de pique sachant que B possède l'as de coeur.

Exercice 45. Nous choisissons au hasard un nombre dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 8\}$ et nous considérons l'événement $A =$ « le nombre est inférieur à 4 », $B =$ « le nombre est supérieur à 4 » et $C =$ « le nombre est pair ».

Discutez la dépendance des événements A et B , A et C , et B et C .

Exercice 46. Considérons des événements A et B tels que $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Calculez $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(A \setminus B)$, $P(A \cup \overline{B})$, $P(A/B)$ et $P(\overline{B}/A)$.

Exercice 47. Une pièce de monnaie est truquée selon l'équation $P(\text{« pile »}) = 3 \cdot P(\text{« face »})$. Nous lançons la pièce quatre fois de suite.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois « face » ?
- b) « Face » est apparu au premier lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois « face » ?
- c) Nous lançons la pièce jusqu'à ce qu'elle tombe trois fois de suite sur « face ». Quelle est la probabilité que le jeu cesse au plus tard au cinquième lancer ?

Exercice 48. Un dé est lancé trois fois de suite. Déterminez la probabilité d'obtenir...

- a) au moins un 3 ? b) au plus un 3 ? c) trois nombres impairs ?
- d) deux 6 et un 1 ? e) un nombre pair une seule fois ? f) ni 3, ni 5 ?
- g) six au dernier lancer sachant que la somme des trois jets vaut 15 ?

Exercice 49.

- a) Un dé est lancé dix fois de suite. Calculez la probabilité d'obtenir au moins un 6.
- b) Combien de fois au minimum faut-il lancer un dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 99 % ?
- c) Combien de fois au minimum faut-il lancer une paire de dés pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois le double 6 soit supérieure à 95 % ?
- d) Combien de fois faut-il lancer une pièce de monnaie pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois « face » soit égale à $\frac{1023}{1024}$?

* **Exercice 50.** Nous tirons au hasard deux des quatre as d'un jeu de cartes. Déterminez la probabilité d'avoir tiré...

- a) l'as de coeur.
- b) les deux as rouges.
- c) les deux as rouges sachant que nous avons tiré l'as de coeur.
- d) l'as de coeur sachant que nous avons tiré au moins un as rouge.

Exercice 51. Luca se rend au lycée en bus 3 jours sur 5 ; sinon il va à pied. Lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard 4 fois sur 7 ; sinon il n'est en retard que 2 fois sur 7. Luca était à l'heure aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il soit venu à pied ?

Exercice 52. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules vertes. Nous tirons successivement 2 boules. Quelles est la probabilité d'obtenir des événements suivants :

- a) 2 boules bleues ?
- b) une boule de chaque couleur ?
- c) 2 boules bleues sachant que la première était bleue ?
- d) 2 boules bleues sachant qu'au moins l'une des deux boules est bleue ?

Envisagez le cas d'un tirage 1) avec remise, puis 2) sans remise.

Exercice 53. Considérons deux urnes U et V extérieurement identiques. L'urne U contient 2 boules noires et 1 boule blanche et l'urne V contient 1 boule noire et 3 blanches. Nous choisissons au hasard une des urnes, puis nous extrayons successivement deux boules (sans remise). Calculez la probabilité de tirer :

- a) une boule noire en dernier.
- b) deux boules de même couleur.
- c) les boules de l'urne U , sachant que la deuxième boule tirée est noire.
- d) deux boules de couleurs différentes, sachant que la première est noire.

Exercice 54. Nous tirons des cartes une à une, sans remise, d'un jeu de 36 cartes, jusqu'à ce que nous obtenions un as. Quelle est la probabilité de devoir effectuer moins de 4 tirages ?

Exercice 55. *Considérons trois boîtes :*

- ★ *La boîte X contient 10 ampoules, dont 4 défectueuses.*
- ★ *La boîte Y contient 6 ampoules, dont 1 défectueuse.*
- ★ *La boîte Z contient 8 ampoules, dont 3 défectueuse.*

Une boîte est choisie au hasard, puis une ampoule en est extraite arbitrairement.

- a) *Déterminez la probabilité $P(N)$ que l'ampoule soit non défectueuse.*
- b) *Si l'ampoule n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte Z ?*

Exercice 56. *Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules vertes et une urne U_2 contient 1 boule rouge et 1 boule verte.*

Nous tirons une boule U_1 , puis nous remettons les boules restantes dans U_2 . Nous tirons alors une boule de U_2 . Calculez la probabilité des événements suivants :

- a) *que cette boule soit rouge.*
- b) *que cette boule soit rouge sachant que la première boule tirée était rouge.*
- c) *que la première boule tirée ait été rouge si au second tirage nous avons une boule rouge.*

Exercice 57. *Combien de fois au minimum faut-il lancer une pièce de monnaie pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile soit supérieure à 99,9 % ?*

Exercice 58. LJP 2004

Un atelier produit des pièces à l'aide de 2 machines A et B ; le 60 % de la production est assuré par la machine A et le reste par la machine B. La machine A est neuve et fonctionne parfaitement bien ; par contre la machine B, plus ancienne, présente un défaut de fabrication : sur 10 pièces fabriquées, une est défectueuse. Nous choisissons des pièces au hasard dans la production pour les contrôler.

- a) *Si nous choisissons 2 pièces, quelle est la probabilité que l'une provienne de A et l'autre de B ?*
- b) *Si nous choisissons 10 pièces, quelle est la probabilité qu'au moins une pièce provienne de A ?*
- c) *Si nous choisissons 5 pièces, quelle est la probabilité qu'une seule pièce provienne de A ?*
- d) *Si nous choisissons une pièce, quelle est la probabilité qu'elle soit bonne ?*
- e) *Combien de pièces faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité d'en trouver au moins une défectueuse soit supérieure à 95 % ?*
- f) *Nous choisissons une pièce qui est déclarée bonne par le contrôle ; quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?*

* **Exercice 60.** Parmi les jumeaux, nous observons 32 % de couples GG (garçon-garçon) et 28 % de couples FF. Parmi les couples mixtes (GF ou FG), le garçon naît en premier dans la moitié des cas. Quelle est la probabilité des événements suivants :

- a) le second jumeau soit un garçon si nous savons que le premier est un garçon ?
- b) la seconde jumelle soit une fille si nous savons que la première est une fille ?

Exercice 61. Dans une urne, nous mettons une boule portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, trois boules portant le numéro 3 et quatre boules portant le numéro 4. Nous tirons une boule de l'urne, notons son numéro et remettons la boule dans l'urne.

a) Qu'est-ce que représente la variable aléatoire X ? Est-elle discrète ou continue ? Quelles sont les valeurs x_1, x_2, \dots prises par X ?

b) Donnez la loi de probabilité de X en calculant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$. Puis représentez la loi en dessinant son graphe.

c) Calculez la valeur moyenne de X , son écart-type ainsi que la variable centrée réduite X^* .

Après 4 tirages, calculez la probabilité d'obtenir :

d) dans l'ordre les numéros 1, 2, 3 puis 4.

e) 4 numéros différents.

f) ni 1, ni 2.

g) au moins deux fois le 4.

Exercice 62. Nous lançons une pièce de monnaie **jusqu'à ce que** l'un des deux événements suivants se produise : 1. face apparaît 2. pile apparaît 5 fois de suite.

Déterminez ce que représente la variable aléatoire X , les valeurs qu'elle peut prendre, sa loi de probabilité, son graphe, sa moyenne, son écart-type et la variable centrée réduite X^* associée.

Exercice 63. Un casino propose le jeu suivant : si, en tirant une carte d'un jeu de poker (52 cartes), vous obtenez un as, vous gagnez 10\$. Sinon vous perdez 1\$. Est-ce un jeu équitable ? Quelle est votre espérance de gain ?

Exercice 64. Gaston vous propose le jeu suivant : il lance deux pièces (non truquées). Vous lui donnez 2.- si face apparaît deux fois et 1.- si face apparaît une fois. Par contre, si face n'apparaît pas, c'est lui qui vous donne 3.-. Acceptez-vous de jouer ?

Exercice 65. Nous jetons une pièce de monnaie 10 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) 4 fois face ?
- b) 6 fois face ?
- c) de 4 à 6 fois face ?
- d) plus de 8 fois face ?

Exercice 66. Pour rouler la langue, c'est-à-dire être capable de ramener les marges vers le haut, il faut posséder un trait héréditaire transmis comme gène dominant simple. Nous estimons à 65% la proportion des gens qui en sont capables. Quelle probabilité y a-t-il, dans une classe de 20 élèves,

- a) de trouver au moins 2 élèves incapables de rouler la langue ?
- b) de trouver 13 élèves capables de rouler leur langue ?

Exercice 67. Nous prenons au hasard une famille de 5 enfants et **notons le nombre** d'enfants qui portent des lunettes. La probabilité qu'un enfant porte des lunettes est de 0,2.

Déterminez ce que représente la variable aléatoire X , les valeurs qu'elle peut prendre, sa loi de probabilité, son graphe, sa moyenne, son écart-type et la variable centrée réduite X^* associée.

Exercice 68. Nous tirons 8 cartes d'un jeu ordinaire (de 36 cartes), avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir

- a) au moins un trèfle ?
- b) exactement 3 trèfles ?
- c) plus de 6 trèfles ?

Exercice 69. Nous lançons 16 fois deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois une somme de points supérieure à 10 ?

Exercice 70. Un fabricant estime que le 5% des appareils qu'il livre devront subir un réglage complémentaire au moment de la mise en service. Quelle probabilité y a-t-il que sur 10 appareils vendus, il y ait plus de deux réglages à effectuer ?

Exercice 71. Pour jouer à l'Euro Millions, il faut choisir 5 numéros parmi 50 et deux étoiles (deux numéros) parmi 11.

a) La probabilité que le ticket « 1-2-3-4-5, étoile 1-2 » gagne est-elle la même que celle du ticket « 14-8-5-32-47, étoiles 6-2 » ?

b) Quelle est la probabilité que l'étoile 5 sorte vendredi ? Et si nous savons qu'elle n'est pas sortie depuis 8 semaines ?

c) Quelle est la probabilité de gagner le jackpot ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une étoile gagnante ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 nombres gagnants ?

Exercice 72. Nous désignons par X la variable aléatoire continue relative à la taille (en centimètres) d'une population de lapins. La densité de probabilité de la variable X est donnée par la fonction

$$f : x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 18 \\ \frac{x-18}{49} & \text{si } 18 \leq x < 25 \\ \frac{32-x}{49} & \text{si } 25 \leq x < 32 \\ 0 & \text{si } x > 32. \end{cases}$$

- a) Dessinez le graphe de f et vérifiez que f est bien une densité de probabilité.
- b) Calculez $P(X = 24)$, $P(X \leq 18,5)$, $P(24,5 \leq X \leq 25,5)$ et $P(X > 20,5)$.
- c) Calculez la moyenne et l'écart-type de cette variable.

Exercice 73. La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-3x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Calculez la valeur de c .
- b) Calculez $P(1 < X \leq 2)$, $P(X > 3)$ et $P(X < 1)$.
- c) Calculez la moyenne et l'écart type de cette variable.

^{*}**Exercice 74.** Nous désignons par X la variable aléatoire continue relative à la taille (en centimètres) d'une population de rongeurs. La densité de probabilité de la variable X est donnée par la fonction

$$f : x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{k}{(x-26)^2} & \text{si } 0 \leq x < 25 \\ \frac{k}{(24-x)^2} & \text{si } x \geq 25 \end{cases}$$

- a) Déterminez la valeur de k puis dessinez le graphe de f .
- b) Calculez $P(17,5 \leq X \leq 18,5)$, $P(24,5 \leq X \leq 25,5)$ et $P(X > 26)$.

Exercice 75. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Calculez

- a) $P(X < 1,55)$ b) $P(0,3 < X \leq 1,4)$ c) $P(X < -1,43)$
d) $P(|X| < 0,9)$ e) $P(|X| > 1,45)$ f) $P(-1,15 < X \leq -0,38)$
g) $P(X > -0,64)$ h) $P(-1,1 < X < 0,3)$

Exercice 76. Soit X^* une variable aléatoire distribuée selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Déterminez x (2 chiffres après la virgule) de manière à ce que

- a) $P(X^* \leq x) = 0,9$ b) $P(X^* > x) = 0,9$
c) $P(|X^*| \leq x) = 0,9$ d) $P(X^* \leq x) = 0,3$
e) $P(X^* > x) = 0,3$ f) $P(|X^*| \leq x) = 0,3$

Exercice 77.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2,3; 0,8)$. Calculez

- a) $P(2,4 < Y \leq 3,1)$ b) $P(1,9 < Y \leq 2,6)$ c) $P(1,4 < Y \leq 1,8)$

Exercice 78. Si la distribution des longueurs des pièces fabriquées par une machine est normale avec une moyenne $\mu = 11,5$ mm et un écart-type $\sigma = 0,2$ mm, quelle est la probabilité que la longueur d'une pièce choisie au hasard soit

- a) comprise entre 11,6 et 11,9 mm ? b) inférieure à 11,2 mm ?
c) supérieure à 11,4 mm ? d) comprise entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$

Exercice 79. Nous admettons qu'à Neuchâtel, au mois de juillet à 9 heures du matin, les températures ont une distribution normale de moyenne 18,2 degrés et d'écart type 3,6 degrés.

a) Calculez la probabilité que la température soit comprise un matin de juillet entre 20 et 25 degrés.

b) Sachant qu'un matin la température est supérieure à la moyenne, calculer la probabilité qu'elle dépasse 20,9 degrés.

c) Déterminez la température t à partir de laquelle nous avons une probabilité de moins de 15% que la température le matin à 9 heures soit supérieure à t .

Exercice 80. *Les tailles des individus d'une certaine population sont distribuées normalement avec une moyenne de 173 cm et un écart-type de 5 cm.*

1. *Quelle proportion de cette population mesure*

a) moins de 165 cm ? b) plus de 180 cm ? c) entre 165 cm et 180 cm ?

2. *Déterminez un intervalle de tailles centré sur la moyenne dans lequel on trouve le quart de la population.*

Exercice 81. *Robert s'inscrit à une compétition de lancer du javelot où sont inscrits beaucoup d'autres participants. Il sait que les performances des participants obéissent à une loi normale de moyenne 64 mètres et d'écart-type 6 mètres.*

a) Quelle est la proportion des participants qui lancent leur javelot à plus de 70 mètres ?

b) Quelle est la probabilité qu'un participant lance son javelot à moins de 49 mètres ?

c) Quelle est la distance minimale que Robert doit réaliser pour se classer dans les meilleurs 10% ?

Exercice 82. *À un examen d'admission dans une école, nous ne recevons à l'épreuve orale que le 60% des candidats qui réussissent le mieux l'épreuve écrite. La moyenne des résultats de l'épreuve écrite est de 62 points et l'écart-type de 9,8 points.*

a) Combien de points au moins un étudiant doit-il obtenir à l'écrit pour être admis à l'oral ?

b) Un candidat est admis à l'oral. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu entre 80 et 85 points à l'écrit ?

Exercice 83. *Nous lançons une pièce de monnaie 400 fois de suite. Quelle probabilité avons-nous d'observer*

a) moins de 220 piles ? b) moins de 190 piles ?

c) plus de 190 piles, mais moins de 220 piles ?

Exercice 84. *Nous lançons un dé un certain nombre de fois et nous nous intéressons à la probabilité que la fréquence des 6 s'écarte de plus de 10% de la probabilité d'obtenir un 6. Cela équivaut à calculer la probabilité que le nombre de 6 obtenus s'écarte de plus de 10% (dans un sens ou dans l'autre) de la moyenne du nombre de 6. Calculez cette probabilité dans les cas suivants :*

a) Nous lançons le dé 180 fois, la moyenne vaut donc 30 et on cherche la probabilité d'obtenir moins de 27 fois 6 ou plus de 33 fois 6.