Chapitre 2

Calcul intégral

Exercice 1. *Soit la fonction* $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Représentez $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ *par un schéma, hachurez la surface correspondante puis calculez la valeur de l'intégrale.*

Exercice 2. *Calculez les intégrales suivantes :*

$$a)\ \int_0^{10} x\,dx \qquad\qquad b)\ \int_a^b c\,dx\,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$c)\ \int_1^4 3x + 5\,dx \qquad\qquad d)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Exercice 3. *Déterminez des approximations successives de* $\int_0^1 x^2\,dx$ *avec 4, 8, puis* n *intervalles, par défaut et par excès. Déterminez ensuite le résultat exacte par passage à la limite quand* $n \longrightarrow \infty$.

Indication : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4. *En vous appuyant sur vos souvenirs des dérivées, trouvez une primitive pour chacune des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 5 \qquad g(x) = 3x \qquad h(x) = x^2 \qquad i(x) = 5x^3 \qquad j(x) = -\cos(x) \qquad k(x) = e^x \qquad l(x) = \frac{1}{x}$$

Indication : *Après avoir trouvé une primitive, vérifiez-la en calculant sa dérivée !*

Exercice 5. *En vous appuyant sur les résultats de l'exercice précédent, déduire la règle d'intégration suivante :*

$$\boxed{\int x^n\,dx = \qquad\qquad\qquad + C\,,\ n \neq -1\,,\ C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 6. *Déterminez l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 6 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^7 \qquad h(x) = \frac{2}{x^3} \qquad i(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad j(x) = \sqrt{x} \qquad k(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$l(x) = e^{3x} \qquad m(x) = e^{-x} \qquad n(x) = \sin(3x) \qquad o(x) = \cos(x-5) \qquad p(x) = (5x-2)^3$$

Exercice 7. *Calculez :*

$$a)\ \int x^2 + x - 1\,dx \qquad b)\ \int 10x^4 - 3x^2\,dx \qquad c)\ \int 3x - \frac{4}{x}\,dx$$

$$d)\ \int x(x-3)(x+3)\,dx \qquad e)\ \int 3\sqrt{x} + \frac{2}{x^4}\,dx \qquad f)\ \int \frac{2x - \cos(4x)}{2}\,dx$$

Exercice 8. *Trouvez la primitive de la fonction* $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x + 1$ *dont le graphe passe par le point* $P(-4; 9)$.

Exercice 9. *Sachant que* $f'(x) = x + e^x$ *et que* $f(0) = 3$*, trouvez* $f(x)$.

Exercice 10. *La fonction* $F(x) = x \cdot \big(\ln(x) - 1\big) + 2018$ *est-elle une primitive de* $f(x) = \ln(x)$ *?*

Exercice 11.

a) Montrez que la dérivée de la fonction $F(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x$ *est de la forme* $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$.

b) Exprimez a, b *et* c *en fonction de* A, B *et* C.

c) Exprimez A, B *et* C *en fonction de* a, b *et* c.

d) En déduire les primitives de la fonction $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

Exercice 12. *Déterminez les primitives de chacune des fonctions suivantes :*

$f(x) = (2x - 3)e^{\frac{x}{2}}$ $\qquad$ $g(x) = \big(13\sin(x) - 11\cos(x)\big)e^{2x}$

$h(x) = (x^2 + 4x - 3)e^{-x}$ $\qquad$ $i(x) = (-5x^2 - 2x + 7)e^{2x}$

Exercice 13. *Calculez :*

a) $\displaystyle\int (2x + 3)e^{2x}\,dx$ $\qquad$ *b)* $\displaystyle\int x^2 \sin(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int (x^2 - x + 1)e^x\,dx$ $\qquad$ *d)* $\displaystyle\int x\sqrt{x + 1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$ $\qquad$ *f)* $\displaystyle\int 2x\sin(3x)\,dx$

Exercice 14. *Calculez :*

a) $\displaystyle\int (x - 5)\ln(x)\,dx$ $\qquad$ *b)* $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x) \cdot 1\,dx$

c) $\displaystyle\int \ln^2(x)\,dx$ $\qquad$ *d)* $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,dx$

Exercice 15. *Calculez :*

a) $\displaystyle\int \sin(x) \cdot e^x\,dx$ $\qquad$ *b)* $\displaystyle\int \cos(x) \cdot \sin(x)\,dx$ $\qquad$ **c)* $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx$

Exercice 16. *Calculez en effectuant le changement de variable indiqué :*

a) $\displaystyle\int 2x(x^2 + 1)^{29}\,dx$ $\qquad$ $t = x^2 + 1$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad$ $t = \sqrt{x}$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}\,dx$ $\qquad$ $t = 4x^2 + 5$

Exercice 17. *Calculez :*

a) $\int (-2x+5)e^{-x^2+5x-1}\,dx$ b) $\int (3x+2)^8\,dx$

c) $\int 10\sin(5x)e^{\cos(5x)}\,dx$ d) $\int \frac{4x-9}{2x^2-9x+2}\,dx$

e) $\int x\sqrt{7x^2+12}\,dx$ f) $\int \tan(x)\,dx$

g) $\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx$ h) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx$

Exercice 18. *Calculez :*

a) $\int \frac{2x^2-3}{x+5}\,dx$ b) $\int \frac{12x^2-5x-1}{4x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^3-5x+2}{2x-1}\,dx$ d) $\int \frac{ax^2+b}{x+c}\,dx$

Exercice 19. *Calculez les intégrales définies suivantes :*

a) $\int_{-1}^{2} x(1+x^3)\,dx$ b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3u\,du$ c) $\int_{4}^{9} 2y\sqrt{y}\,dy$

d) $\int_{1}^{3} \frac{1}{2x-1}\,dx$ e) $\int_{0}^{8} 12\sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\int_{0}^{2} \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^4}\,dx$

g) $\int_{-\pi}^{\pi} 3\sin(x)\,dx$ h) $\int_{-3}^{3} \sqrt{\frac{2}{3}x+2}\,dx$ i) $\int_{0}^{\ln(2)} 3x\cdot e^x\,dx$

j) $\int_{4}^{9} \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\,dx$ k) $\int_{-3}^{3} \left(\frac{8}{x^2}+x^3\right)\,dx$

Exercice 20. *Représentez puis calculez l'aire sous la courbe d'équation :*

a) $y = x^2+2$ *entre* $x=-1$ *et* $x=1$;

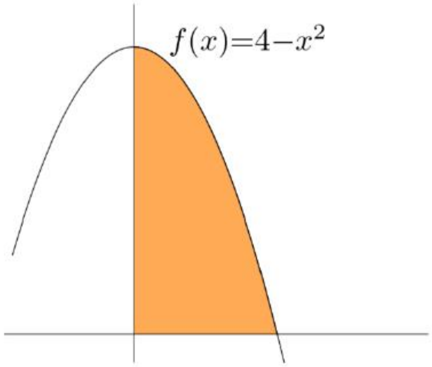
b) $y = \frac{6}{x^3}$ *entre* $x=1$ *et* $x=2$.

Exercice 21. *Calculez l'aire au-dessus de l'axe Ox mais en dessous de la courbe*

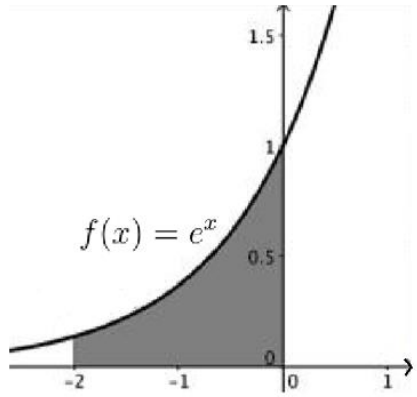
$$y = (1-x)(x-2)$$

Exercice 22. *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez l'aire de la partie grisée.*

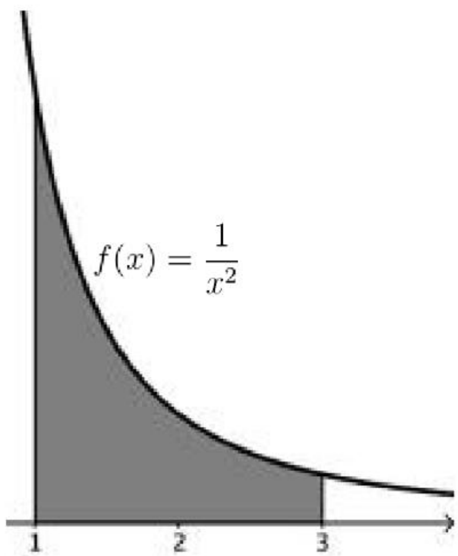
a)



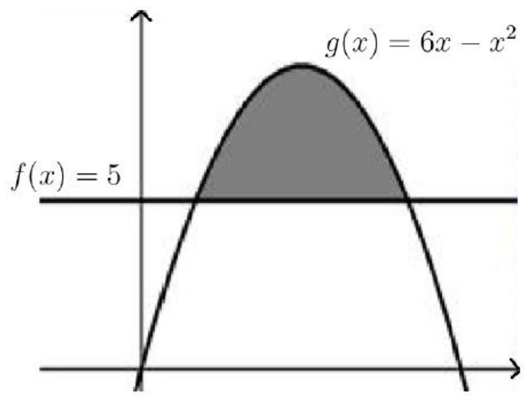
b)



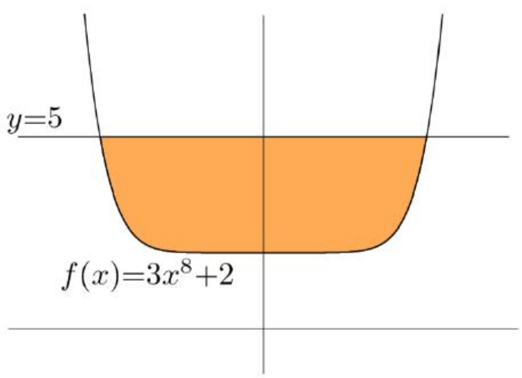
c)



d)



**e)*

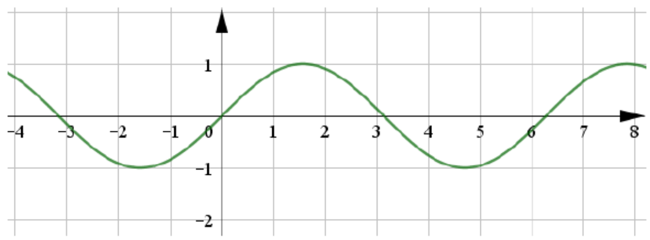


Exercice 23. *Lors de l'introduction de la notion d'intégrale, nous avons considéré une fonction f positive dans l'intervalle d'intégration. Mais que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? Pour le découvrir, calculez successivement les intégrales définies ci-dessous :*

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x)\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx$

Ci-dessous se trouve le graphe de $\sin(x)$ *dans l'intervalle* $[-\pi; 2\pi]$. *Que constatez-vous de particulier et comment l'expliquez-vous ?*

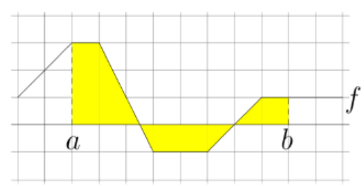


Exercice 24. *Calculez* $\displaystyle\int_0^2 (x^2-4)\,dx$, $\displaystyle\int_2^3 (x^2-4)\,dx$ *et* $\displaystyle\int_0^3 (x^2-4)\,dx$. *Que remarquez-vous ?*

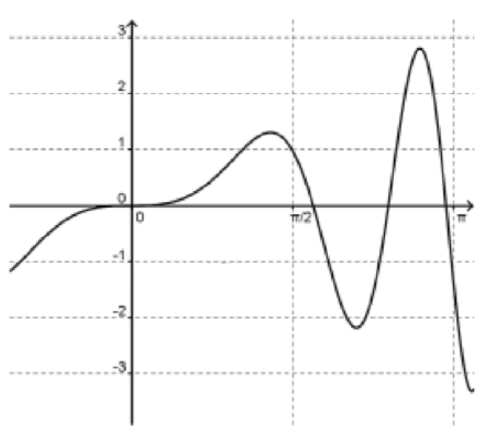
Exercice 25. *Sachant que* $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 4$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ *et* $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = -7$, *calculez* $\displaystyle A = \int_2^0 f(x)\,dx$, $\displaystyle B = \int_0^1 f(x)\,dx$, $\displaystyle C = \int_0^2 \big(2f(x) - g(x)\big)\,dx$.

Exercice 26.

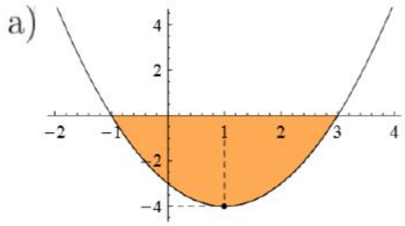
Calculez l'aire totale de la surface colorée ainsi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *(1 unité = 1 carreau).*

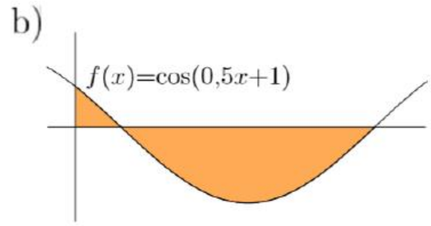


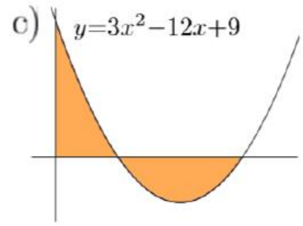
Exercice 27. *Calculez* $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x^2)\,dx$ *puis interprétez géométriquement votre résultat à l'aide du graphe de la fonction* $f(x) = x\sin(x^2)$ *ci-dessous :*



Exercice 28. *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez l'aire totale de la surface grise.*







Exercice 29.

a) Calculez l'aire du domaine borné par la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(x)$ *et l'axe* Ox *sur une période.*

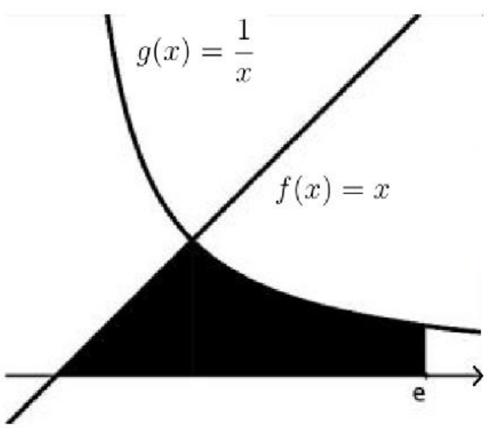
b) Calculez l'aire du domaine borné par la courbe $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ *et l'axe* Ox *dans l'intervalle* $[0; 3]$.

c) Calculez l'aire de la surface fermée limitée par le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 4x$ *et l'axe* Ox.

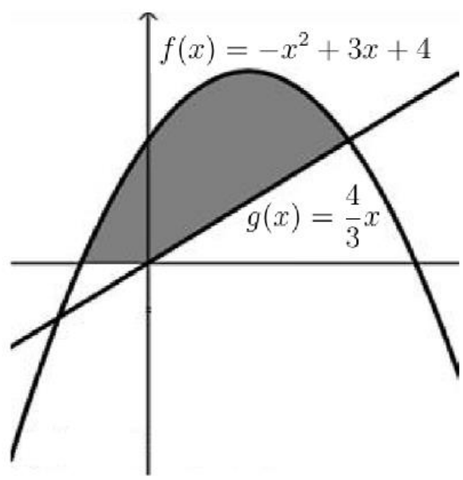
***Exercice 30.** *Calculez* $A = \int_{-5}^{5} |x|\, dx$, $B = \int_{0}^{2} |2x-3|\, dx$ *et* $C = \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos(x)|\, dx$

Exercice 31. *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez l'aire de la partie grisée.*

a)

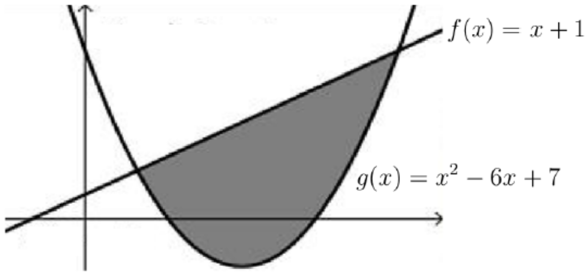


b)

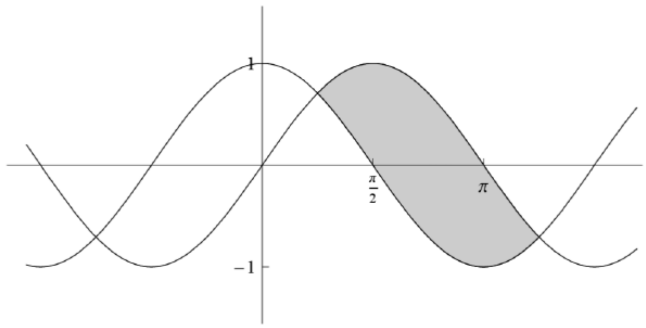


Exercice 32. *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez l'aire de la partie grisée.*

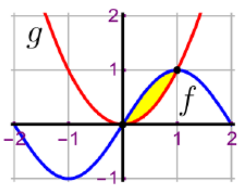
a)



b)



c)



avec $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ *et* $g(x) = x^2$.

Exercice 33. *Représentez les graphes des fonctions* $f(x) = x^3 - x^2 - x$ *et* $g(x) = x$ *puis calculez l'aire de la surface fermée limitée par les graphes de ces deux fonctions.*

Exercice 34.

Calculez l'aire de la surface grise ci-contre limitée par les graphes des fonctions $f(x) = 2\sin(2x)$ *et* $g(x) = -2x\sin(2x)$.

Exercice 35. *Soit la parabole* $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 3$ *ainsi que* $A(1; a)$ *et* $B(5; b)$ *deux points de* $\mathcal{P}$. *Calculez l'aire de la surface comprise entre l'arc* AB *et la corde qui l'intercepte.*

Exercice 36. *Soit la fonction* $f(x) = 4x - x^2$.

a) Calculez la valeur moyenne de la fonction f *sur l'intervalle* $[0; 3]$.
b) Déterminez une valeur $c \in [0; 3]$ *où* f *atteint sa valeur moyenne.*
c) Esquissez le graphe de f *et superposez un rectangle dont l'aire est précisément égale à l'intégrale de* f *entre* 0 *et* 3.

Exercice 37. *Dans une ville, la température moyenne (en °C) t heures après 9h est approximativement donnée par la fonction :*

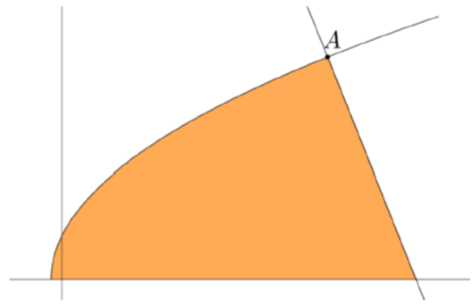
$$T(t) = \frac{80}{9} + \frac{70}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Quelle est la température moyenne entre 9h et 21h ?

Exercice 38.

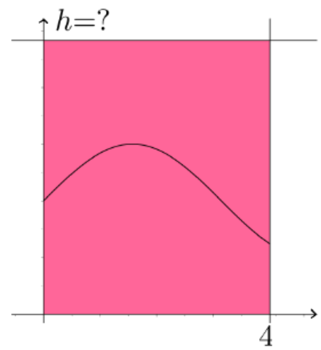
Sur le dessin ci-contre sont représentées la courbe d'équation $y = \sqrt{4x+1}$ *ainsi que la normale à cette courbe passant par le point* $A(6;?)$.

Déterminez l'équation de cette normale puis calculez l'aire de la partie grise.



Exercice 39.

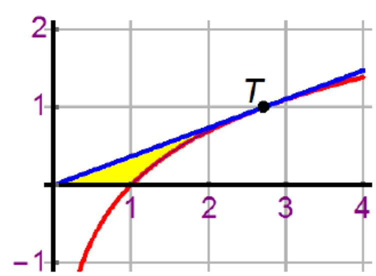
Quelle doit être la hauteur de cette cible rectangulaire pour qu'une flèche tirée au hasard ait la même probabilité d'atteindre la cible en dessus qu'en dessous de la courbe d'équation $y = \sin(x) + 2$.



Exercice 40.

Nous avons représenté ci-contre le graphe de la fonction $f(x) = \ln(x)$ *ainsi que la tangente au graphe en son point* T *d'abscisse* e.

Prouvez que la tangente passe par l'origine, puis calculez l'aire de la surface grise (allant jusqu'au point T*).*

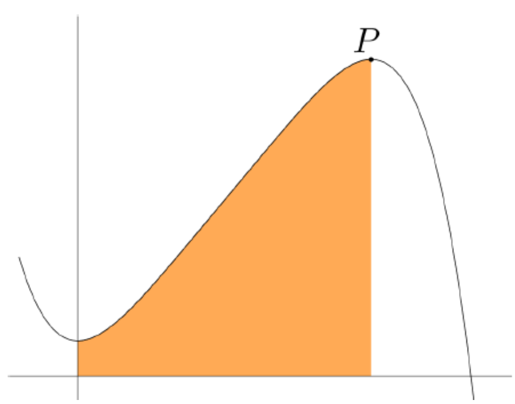


Exercice 41.

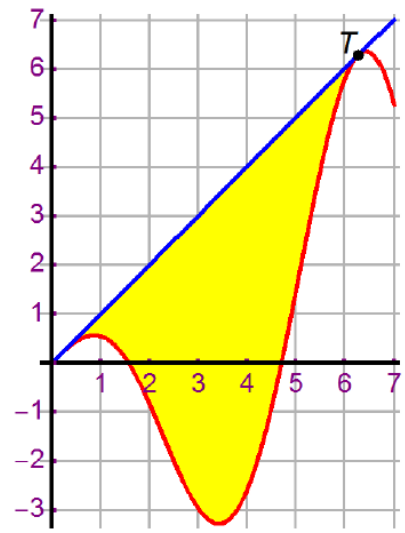
Le dessin ci-contre représente le graphe de la fonction

$$f(x) = (1-4x)^5 + 20x$$

Calculez l'aire de la surface grise.



Exercice 42.



Nous avons représenté ci-contre le graphe de la fonction $f(x) = x \cdot \cos(x)$ *ainsi que la droite qui est tangente au graphe à l'origine et en un autre point* T.

Calculez l'aire de la surface grise.