Exercice 1 On donne une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres réels.

- Calculer $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$ et $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4$
- Trouver une formule donnant la valeur de S_n
- Démontrer par récurrence la formule trouvée
- Calculer, si elle existe, la limite $S=\lim_{n\to\infty} S_n$

1) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5, \ldots$, $a_n=$nième nombre impair

2) $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{4}$ $,\ldots,$ $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

3) $a_1=\frac{1}{1\cdot 3}$, $a_2=\frac{1}{3\cdot 5}$, $a_3=\frac{1}{5\cdot 7}$ $,\ldots,$ $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

4) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2n+1$

5) $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9, \ldots,$ $a_n=n^2$
Indication: Calculer $6S_n$ et l'écrire sous la forme $n(n+1)(\ ?\ )$

Exercice 2 Démontrer par récurrence

1) $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

2) $(x^n)'=nx^{n-1}$

3) $\sum_{r=2}^{n}(r-1)r=\frac{1}{3}n(n^2-1)$ *pour* $n\geq 2$

4) 13^n+6^{n-1} est divisible par 7

5) $(1+h)^n\geq 1+nh$ avec $h\geq 0$ (inégalité de Bernouilli)

Exercice 3 1) Démontrer par récurrence $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

2) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots$

Exercice 4 1) Soit r un nombre réel différent de 1. Démontrer que $1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

2) Si $|r|<1$, calculer la somme infinie $1+r+r^2+r^3+\ldots$

3) Utiliser la formule de sommation précédente, pour calculer les sommes infinies suivantes :

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$

b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots$

c) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\ldots$

d) $\frac{3}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\ldots$

Exercice 5 Soit a_n, le nombre maximal de points d'intersection de n droites(non confondues) du plan.

a) Trouver à l'aide d'un dessin les valeurs de a_2, a_3, a_4 et a_5.

b) Expliquer l'égalité $a_{k+1}=a_k+k$

c) Démontrer par récurrence que $a_n=\frac{1}{2}n(n-1)$

Exercice 6 Démontrer par récurrence $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

Exercice 7 Etant donné $f(x)=\frac{1}{x}$, calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ et $f^{(5)}(x)$

Deviner $f^{(n)}(x)$ puis prouver le résultat par récurrence.

Exercice 8 On pose $a_0=2$, $a_1=3$ et $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}$

Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5 puis montrer que $a_n=2^n+1$.