Chapitre 3 : Les vecteurs

Introduction aux vecteurs

Exercice 1

Construis 3 vecteurs de directions différentes, et appelle les $\vec{a}$ $\vec{b}$ et $\vec{c}$

Construis le vecteur $\vec{d}$ tel que $\vec{a} = \vec{d}$

Construis le vecteur $\vec{e}$ tel que $\vec{e} = -\vec{b}$

Construis le vecteur $\vec{f}$ tel que $\vec{f} = 3\vec{c}$

Construis le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b}$

Construis le vecteur $\vec{h}$ qui avance de 2 horizontalement et monte de 3 verticalement. On notera que les coordonnées de ce vecteur sont $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

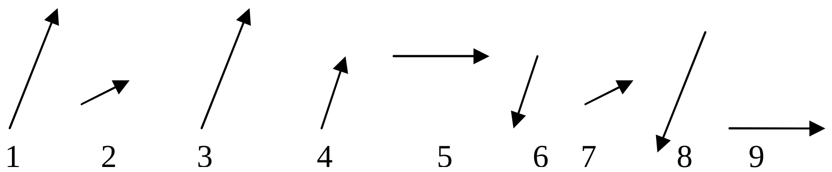
Exercice 2

Représenter à l'aide de flèches :

1) Deux vecteurs de même direction, de sens différents et dont la longueur de l'un est le double de celle de l'autre
2) Deux vecteurs de directions différentes et de mêmes longueurs
3) Trois vecteurs différents, dont deux ont la même longueur
4) Trois vecteurs différents qui ont la même direction et le même sens
5) Peut-on représenter deux vecteurs de direction différente, mais de même sens ? *Si oui... les dessiner*

Exercice 3 Exercice supplémentaire

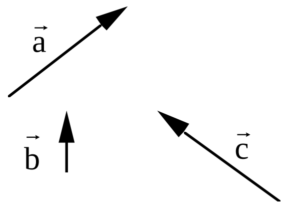
Parmi les vecteurs suivants, quels sont ceux qui sont égaux deux à deux ?



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exercice 4

Soit les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

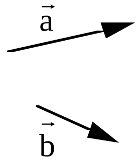


Construire :

1) $\vec{a} + \vec{b}$
2) $\vec{b} + \vec{c}$
3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
4) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Exercice 5

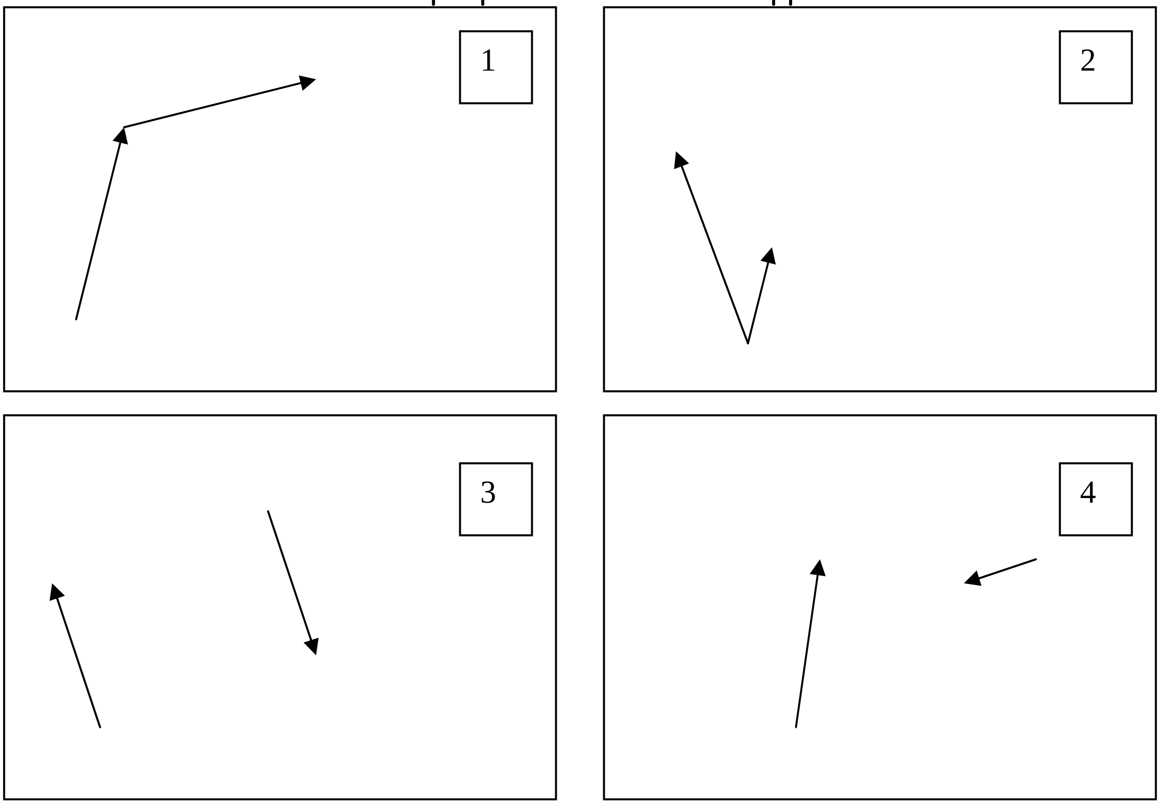
Soit les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$



Dessiner les nouveaux vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

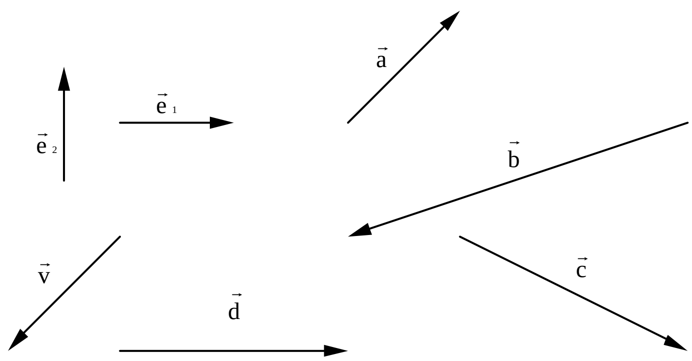
$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ $\quad\quad$ $\vec{d} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ $\quad\quad$ $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ $\quad\quad$ $\vec{y} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

Exercice 6 Exercice supplémentaire Dans chaque cas, tracer un vecteur qui soit la somme des deux vecteurs proposés ; comment s'appelle le vecteur obtenu en 3 ?



Exercice 7

Exprimer tous ces vecteurs comme combinaisons linéaires de $\vec{e}_1$ et de $\vec{e}_2$



Exercice 8

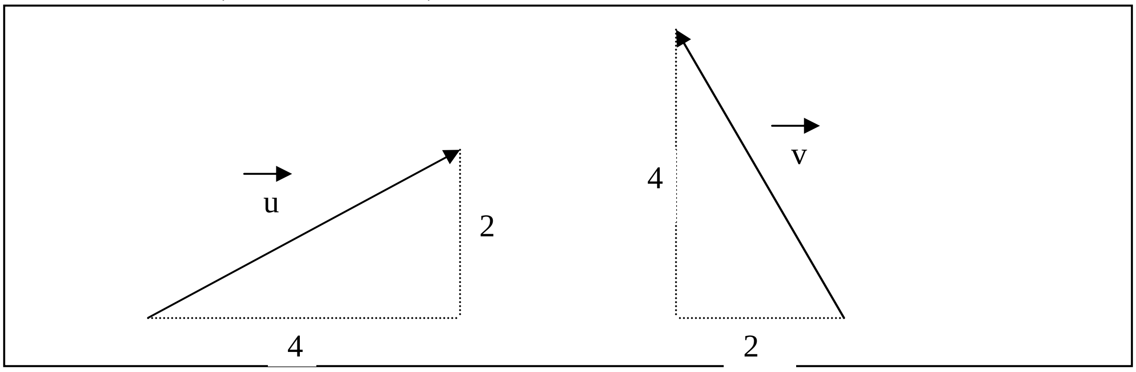
Dans une base orthonormée $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, construire

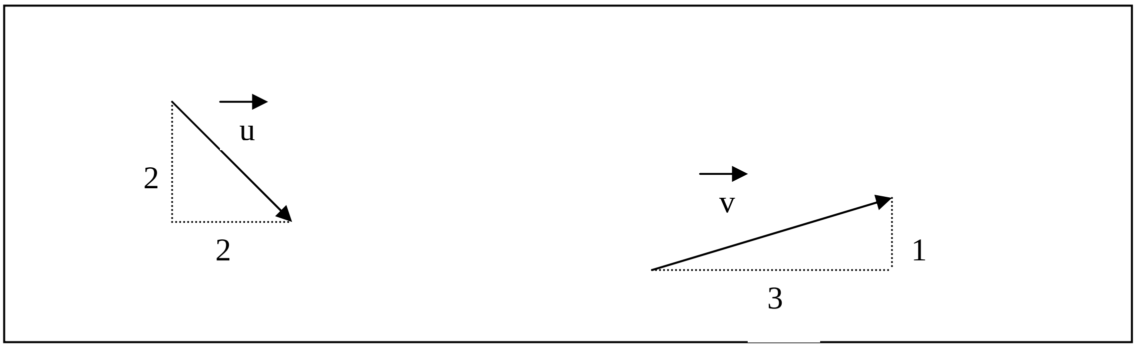
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Construire
   $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b}$
   $\vec{n} = \vec{a} - \vec{d}$
2) Construire
   $\vec{q} = 2\vec{a}$
   $\vec{r} = -\vec{b}$
   $\vec{t} = -4\vec{d}$
3) Quelles sont les composantes de ces 5 vecteurs ?

Exercice 9 Exercice supplémentaire

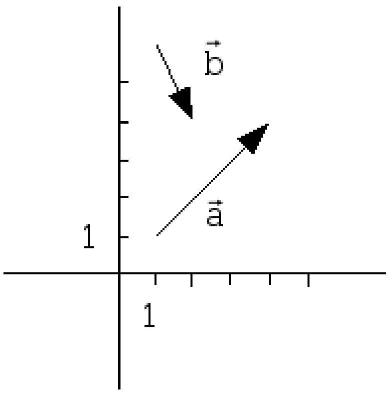
Dans les deux cas, tracer $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}+\vec{v}$ et $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}$.

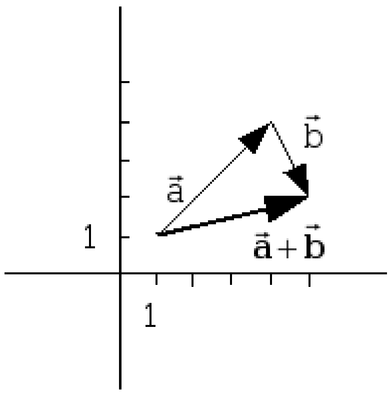




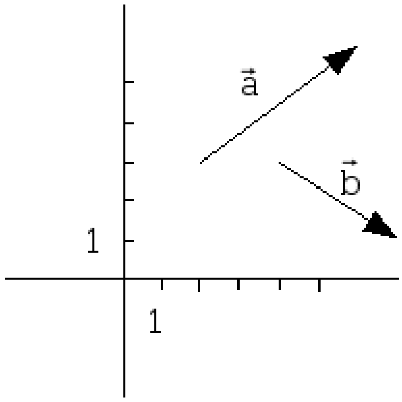
Exercice 10 Exercice supplémentaire

<u>Rappel:</u> L'addition des deux vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ est donnée en composantes par: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$ et géométriquement par:





Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$:



Dessiner les vecteurs suivants et donner leurs composantes:

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{d} = \vec{b} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} = \vec{a} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$ (rappel: $\vec{f}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$)

e) $\vec{g} = \vec{a} - 2\vec{b}$

Exercice 11

Dessiner le triangle ABC à partir des informations suivantes:

a) Le point B a les coordonnées (1;1)

b) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{BA}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Répondre aux questions suivantes:

a) Quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC}$?

b) Quelles sont les coordonnées du point A?

c) Dessiner le parallélogramme ABCD où D est obtenu par: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, puis donner les composantes de D.

Exercice 12 : Relativement à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on se donne :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $-3\,\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
2) Exprimer $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{b}$ et de $\vec{c}$
3) Vérifier par le dessin.

Exercice 13 : Relativement à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on se donne :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Trouver λ et $\mu \in$ R tel que $\vec{a} = \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c}$

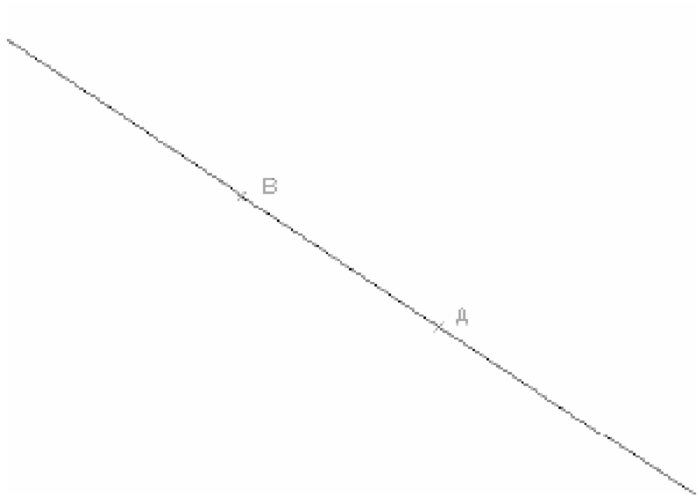
Exercice 14 :_Relativement à un repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on se donne :
A(3 , 2) B(3 , -4) C(-5 , 1) D(0 , 2)
1) Dessiner les points A, B, C et D
2) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$
3) Lire les composantes des vecteurs
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$
4) Dessiner et trouver les coordonnées de E, F et G si :
$\overrightarrow{AE} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ $\overrightarrow{BF} = -3\,\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ $\overrightarrow{CG} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

Exercice 15 : Soit A(-6 , 4) B(3 , 1) C(1 , -1) et D(6 , 0)
1) Montrer que A, B et D sont alignés.
2) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 16 : Sur la droite AB ci-dessous, placer précisément :

1) Un point T tel que $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

2) Un point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{BQ}$.



Exercice 17

On donne le quadrilatère FACE avec ses sommets : F (0 ; 18), A(-5 ; 0), C(31 ; 14) et E(36 ; 32).

1) Montrer, par calculs, que le quadrilatère FACE est un parallélogramme.

2) Calculer le point P tel que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

3) Calculer le point M milieu d'AC.

4) Chercher une équation cartésienne de la droite d passant par les points F et M.

5) Décider, par calcul, si le point P est sur la droite D.

Applications des vecteurs aux équations paramétriques de droites

Exercice 18

On donne le point A(3 ; 2) et le vecteur $\vec{t}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. Déterminer pour $m\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ les points P_m suivants : $\overrightarrow{OP_m}=\overrightarrow{OA}+m\vec{t}$.

Représenter ces points dans un système d'axe.

Remarque(s).

Exercice 19

(a) Déterminer les équations paramétriques puis la cartésienne de la droite passant par A(2,3) et parallèle à $\vec{t}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(b) Déterminer les équations paramétriques puis la cartésienne de la droite passant par B(1,1) et parallèle à $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(c) Déterminer les équations paramétriques puis la cartésienne de la droite passant par C(-1,1) et parallèle à $\vec{v}=\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$. Remarque(s).

(d) Déterminer les équations paramétriques puis la cartésienne de la droite passant par D (1,1) et parallèle à d : x+y=10.

(e) Déterminer les équations paramétriques puis la cartésienne de la droite passant par E(2,8) et F(4,9)

Exercice 20

(a) Ecrire les deux équations paramétriques de la droite d : 2x +3y = 6

(b) Ecrire les deux équations paramétriques de la droite d : y = 6

Exercice 21

On se donne les points A(-6 ; 9), B(2 ; 5), C(10 ; 9) et D(0 ; -6). On appelle d1 la droite qui passe par A et B et d2 celle qui passe par C et D. Le point M est défini comme étant l'intersection des droites d1 et d2.

1) Trouver par calculs les coordonnées du point M

2) Que vaut le déterminant suivant : Det ($\overrightarrow{AB}$;$\overrightarrow{AM}$) ?

Exercice 22

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on place les points : A (2 ; 4) et B (-1 ; -2).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (valeur exacte).

Exercice 23

Soient a : $3x+2y-13=0$

b : $2x-y+3=0$

c : $x-4y-2=0$

1- Ecrire les équations paramétriques de ces 3 droites.
2- Ces trois droites portent les côtés d'un triangle ABC. Déterminer les sommets ABC.
3- Donner l'équation paramétrique de la droite parallèle à b qui passe par B.

Exercice 24

On donne les points A(-5 ; 2), B(3 ; 4), C(9 ; -6) et D(4 ; -13).

1) Calculer les coordonnées de E, point d'intersection de la droite BC avec l'axe *Ox*.

2) Montrer, par calculs, que les droites AD et BC sont parallèles.

3) Montrer, par calculs, que le point G(5 ; 1) n'appartient pas à la droite BC.

4) Déterminer les coordonnées de M, point milieu de AD.

5) Déterminer les coordonnées de P tel que $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

6) Dessiner la figure dont l'aire se calculerait par $\frac{1}{2}\left|Det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.

7) Déterminer les coordonnées de R tel que $\overrightarrow{BR} = -3\,\overrightarrow{CR}$.

Exercice 25 :

Soit un repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère le triangle ABC quelconque donné par A(-1 ; 3), par B(4 ; 2) et par $M=(\frac{1}{2} ; -2)$, le milieu du côté AC.

1) Établir une équation cartésienne de la droite d_{AB} passant par A et B.

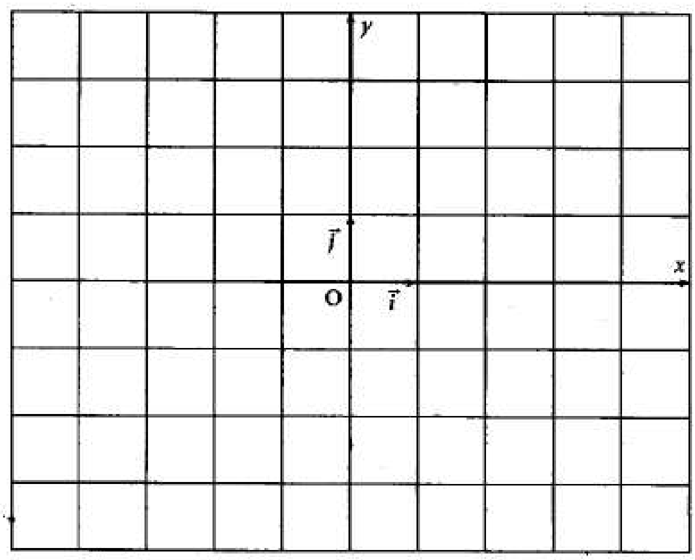
2) Établir des équations paramétriques de la médiane passant par B.

3) Calculer les coordonnées du sommet C.

4) Calculer la surface du triangle.

Exercice 26 :

1) Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, placer les points A (1 ; 2), B (3 ; -2), C (-1 ; 1).



2) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4) Calculer les normes de vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$. .

5) A l'aide du théorème de Pythagore, préciser la nature du triangle ABC.