Exercices de révision

Partie 1 : Géométrie analytique

Partie 2 : Analyse fonctionnelle

Partie 3 : Construction géométrie 3D

Partie 4 : Trigonométrie

NB : Les probabilités ne sont pas révisées ici, leur étude ayant éte fait entre février et avril !

Conseils :

faciles difficiles

1) Faites les exercices impairs de chacune des 4 parties avant d'attaquer les exercices pairs.
2) N'essayez pas de faire un examen écrit des années précédentes avant d'avoir fait suffisamment d'exercices de révision
3) Ne faites pas l'examen écrit de l'année passée avant d'avoir fait 1 ou 2 examens plus anciens

Partie 1 : le Géométrie analytique

1) Quel est le point de Ox situé à distance 4 de $y = -\frac{12}{5}x + 1$

2) Calculer les bissectrices de $7x - y = 0$ et de $x + y + 2 = 0$

3) Soit $A(5;1)$, $B(-2;7)$ et $C(-3;-10)$, calculer l'aire du triangle ABC

Théorie :

équations de droite : (donnée par :)
- 1 point et $1\ \vec{v} \parallel d$
- 1 point et $1\ \vec{n} \perp d$ (vecteur normal)
- 2 points

base, repère, Chasles } vecteurs

opérations sur les vecteurs :
- déterminant (//)
- produit scalaire ($\perp$)

distance :
- point-point (cercle)
- point-droit (bissectrice) tangente à un cercle

pas oublier : point-milieu ⊕ médiatrice

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel d : \; bx - ay$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \perp d : \; n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + \ldots$

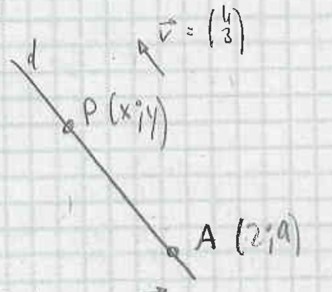
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \parallel \vec{b}$: "t" tel que $\vec{b} = t\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b_1 = t \cdot a_1 \Leftrightarrow t = \frac{b_1}{a_1} \\ b_2 = t \cdot a_2 \Leftrightarrow t = \frac{b_2}{a_2} \end{array} \right.$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

$$\underbrace{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}_{\text{dét}(\vec{a};\vec{b})} = 0$$

parallèle (si pas 0 ⇒ pas parallèle)



$P \in d \Leftrightarrow \vec{AP} \parallel \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{AP};\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ y-9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\text{dét}(\vec{a};\vec{b})$
forme algébrique	$a_1b_1 + a_2b_2$	$a_1b_2 - a_2b_1$
f. géométrique	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert\vec{a}\rVert \cdot b'$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert\vec{a}\rVert \cdot b''$

4) Calculer le rayon et le centre du cercle d'équation : $x^2+y^2+x-10y+\frac{93}{4}=0$

5) Equation des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(1;3)$ et de rayon $r = \sqrt{29}$ qui sont parallèles à $\vec{v}=\binom{2}{-5}$

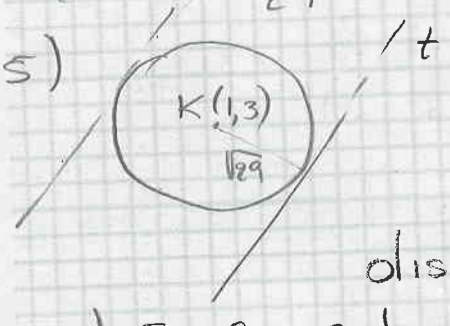
6) Quelle est l'inclinaison (= angle entre O_x et d) de d passant par $A(a;0)$ et $B(0;2a)$?

4) $x^2+y^2+x-10y+\frac{93}{4}=0$

$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y-5)^2-25+\frac{93}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-5)^2=2 \quad K(-\frac{1}{2};5) \quad r=\sqrt{2}$

5)



$\vec{v}=\binom{2}{-5} \Rightarrow \vec{n}_t=\binom{5}{2}$

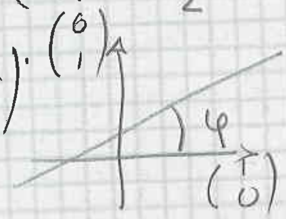
$t: 5x+2y+c=0$

$dist(K,t)=r \Leftrightarrow \qquad \sqrt{29}^2=29$

$\frac{|5+6+c|}{\sqrt{25+4}}=\sqrt{29} \Leftrightarrow |11+c|=29 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 11+c_1=29 \Leftrightarrow c_1=18 & 5x+2y+18=0 \\ 11+c_2=-29 \Leftrightarrow c_2=-40 & 5x+2y-40=0 \end{cases}$

6)



$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$

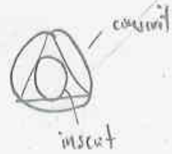
$\vec{a}=\binom{1}{0} \parallel Ox \qquad \vec{b}=\binom{-a}{2a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-a$

$\|\vec{a}\|=1 \qquad \|\vec{b}\|=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5a^2}=|a|\sqrt{5}$

$\cos\varphi=\frac{-a}{1\cdot|a|\cdot\sqrt{5}}= \begin{cases} \frac{-a}{a\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi_1=116.56 \\ \frac{-a}{-a\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi_2=63.4 \end{cases}$

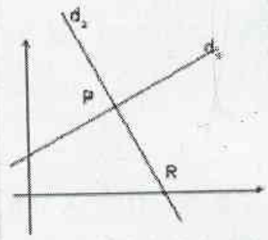
$a\neq 0$



7) Quelle est l'équation du cercle circonscrit au trapèze K(0; 2), L(0 ; -1) ,M(6 ; 5) et N(3 ; 5)

8) Soit P(6; 4) , $d_1: x - 6y + 18 = 0$ et $d_1 \perp d_2$
Soit R le point de d_2 sur O_x

Calculer $\|\overrightarrow{PR}\|$

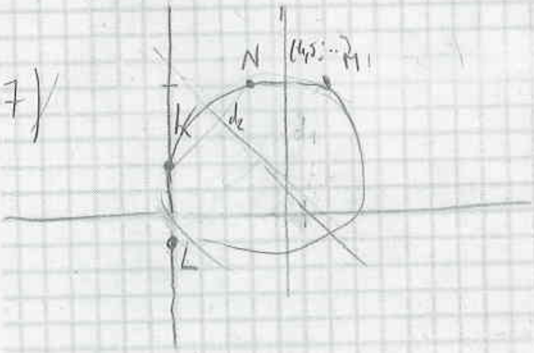


9) Soit A et B 2 points fixes. Quel est le lieu des points (nature + équation) dans chacun des cas suivants : a) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ b) $D(\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AB}) = 0$ c) $\|\overrightarrow{AP}\| = 2 \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$

10) Soit la parabole $\mathscr{P}$: $y = kx^2 + (k+1)x - 1$

Quelles sont les valeurs de k pour que $\mathscr{P}$ soit entièrement *en dessous* de l'axe O_x ?

7)



$\overrightarrow{LM} \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}$ $d_1 = 6x - 6$

$d_2: 6x + 6y + c = 0$

moyenne de L et M $= (3;2)$

$(3;2) \to d_2$: $6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + c = 0$
$c = -30$

$d_2 = 6x + 6y - 30 = 0$

$d_1 = 3x - \frac{27}{2} = 0$

$\overrightarrow{NM} \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$d_1 = 3x + c = 0$

moyenne de N et M $\left(\frac{9}{2} ; 5\right)$ $\frac{27}{2} + c = 0$
$c = -\frac{27}{2}$

intersection C : $d_1 = d_2$

$x = 4,5 \to 6 \cdot 4,5 + 6y - 30 = 0$
$27 + 6y - 30 = 0$
$6y = 3$
$y = \frac{1}{2}$

$C = \left(\frac{9}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$\delta(C;N) = \|\overrightarrow{CN}\|$

$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}$: $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}$
$\sqrt{2,25 + 20,25}$
$= \sqrt{22,5}$

éq. cercle $= \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 22,5$

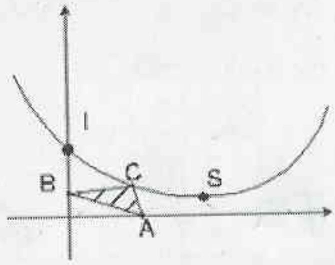
11) Soit la parabole $\mathscr{P}$: $y = \frac{1}{4}x^2 - \cancel{4x}^{\,2x} + 5$ de sommet S

On sait $\mathscr{P} \cap 0_x = \{I\}$

Soit un point $C \in \mathscr{P}$ entre I et S (cf schéma)

Soit $A(2;0)$, $B(0;2)$ et

Déterminez C afin que la surface de ABC soit extrémale (min ou max ??)



13) Ecrire l'équation hessienne de chacune des droites $d_1: \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ et $d_2: y = \frac{2}{3}x + 1$

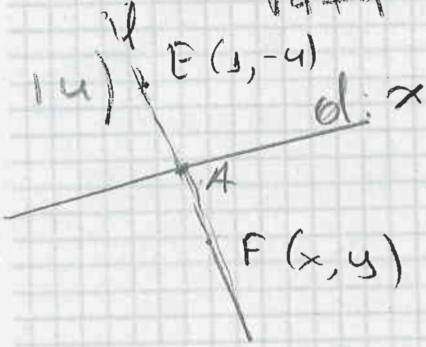
14) La droite $d: x + 2y = 0$ est la médiatrice du segment EF avec E(1 ; -4).
Calculer les coordonnées du point F

13) $d_1: \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ $\quad \begin{aligned} x &= 5 + 3\lambda \\ + \; 3y &= 3 - 3\lambda \\ \hline x + 3y &= 8 \end{aligned}$ cart. $\quad$ Hess. $\dfrac{x + 3y - 8}{\sqrt{1 + 3^2}} = 0$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x + 3y + c = 0 \leftarrow (5, 1)$

$y = \frac{2}{3}x + 1 \Leftrightarrow 3y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - 3y + 3 = 0$

$\dfrac{2x - 3y + 3}{\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}}$

14) 

$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{d}$

$l: 2x - y + c = 0 \leftarrow E(1, -4)$

$2 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

$l: 2x - y - 6 = 0$

$A = l \cap d = \begin{cases} 2x - 6 = y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

$x + 2(2x - 6) = 0$

$x + 4x - 12 = 0$

$5x = 12$

$x = \frac{12}{5}$

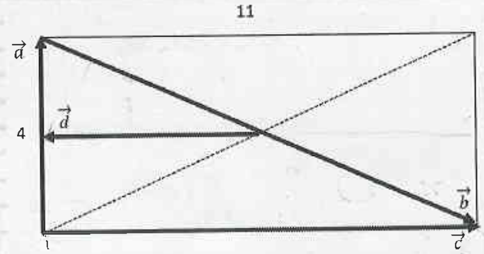
$\frac{12}{5} + 2y = 0$

$y = -\frac{12}{10}$

$\vec{EA} = \vec{AF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{12}{5} - 1 \\ -\frac{6}{5} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{12}{5} \\ y + \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

15) Soit un rectangle de côté 4 et 11. On considère les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ qui sont parallèles à un des côtés et $\vec{b}$ qui « est » une diagonale (cf schéma).

Compléter en utilisant la forme géométrique du produit scalaire :



a) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4$

c) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

d) $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$

e) $\vec{b} \cdot \vec{b} = 105$

f) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 11^2$

g) $\vec{b} \cdot \vec{d} = \|\vec{d}\| \cdot b' = \frac{11}{2} \cdot (-11)$

h) $\vec{c} \cdot \vec{c} = 11^2$

i) $\vec{c} \cdot \vec{d} =$
$= -11 \cdot \frac{11}{2}$

j) $\vec{d} \cdot \vec{d} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$

$b = \sqrt{11^2 - 4^2} = \sqrt{105}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot b'$

Partie 2 : Analyse fonctionnelle

1) $f(x) = \sqrt{sin(3x)} \Rightarrow f'(x) = ?$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx = ?$

3) Soit la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^3 + 6x - 1$, quelle est l'équation de sa tangente au point d'inflexion ?

4) Déterminer le domaine d'existence de $f(x) = \frac{1}{ln(x^2+x-2)}$

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(3x)}} \cdot 3\cos(3x) = \frac{3\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}}$

$(\ln(\sin 3x))' = \frac{3\cos(3x)}{\sin(3x)}$ — exemple

2) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x + \frac{\pi}{2})\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{2})\Big|_0^{\pi/4} =$

$\left(\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)\right.$ ex. $\left.\right)$

=

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + 6x - 1 = f(x)$

$f'(x)$ $y' = \frac{3}{2}x^2 + 6$

$f''(x)$ $y = 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	PI	$\cup$	

$x = 0$ $f(0) = -1$

t: $y = mx + h$

$f(0) = -1$

$f'(0) = 6$

$f(0) = f'(0) \cdot 0 + h$

$-1 = 6 \cdot 0 + h \Rightarrow h = -1$

5) Déterminer les asymptotes et comportement asymptotiques de $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+2}$

6) Calculer $lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

7) Soit f(x) = sin²(x). Résoudre $f''(x) = 0$ dans $[0; 2\pi]$

8) La somme de 2 nombres vaut 75. Trouver ces nombres tels que le produit du carré de l'un par l'autre soit maximum.

$f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x}$ $y = 0$ A

$f(x) = \frac{2x^2+x}{3x^2-1}$ AH y

5) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

AV: $\frac{nb}{0}$ $x = -2$

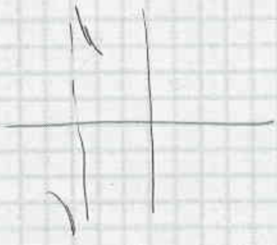
AO

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+x & x+2 \\ -(2x^2+4x) & 2x+3 \\ -3x & \\ -(3x+6) & \\ -6 & \end{array}$$

$y = 2x+3$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0$ $x = 0$ $x = -1/2$

	$-\infty$	-2		$-1/2$		0	$+\infty$
$2x^2+x$	+	+	+	0	−	0	+
$x+2$	−	0	+		+		+
	−	‖	+	0	−	0	+



6) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)} =$

$= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{\underbrace{2x-1-9}_{2x-10}} = \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}{2\cancel{(x-5)}}$

$= \frac{6}{2} = 3$

9) En x = a les tangentes aux courbes $y_1 = \frac{4}{x^2}$ et $y_2 = -\frac{1}{4}x^2$ sont parallèles. Calculer a.

10) Donner toutes les asymptotes (sans comportement) de f(x) = $\frac{xe^x}{2e^x-6}$

11) Chercher l'abscisse des points d'inflexion de $(2x^2+2x-1)e^{-2x}$

12) Calculer $\int x \cdot ln(x)dx$

13) Calculer $\int \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx$

14) Calculer $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

15) Calculer m tel que la surface comprise entre y = mx et y = x^2 soit égale à 9.

16) Soit f(x) = $\frac{3x+2}{3(x+1)^2}$
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier la croissance et la courbure de f.

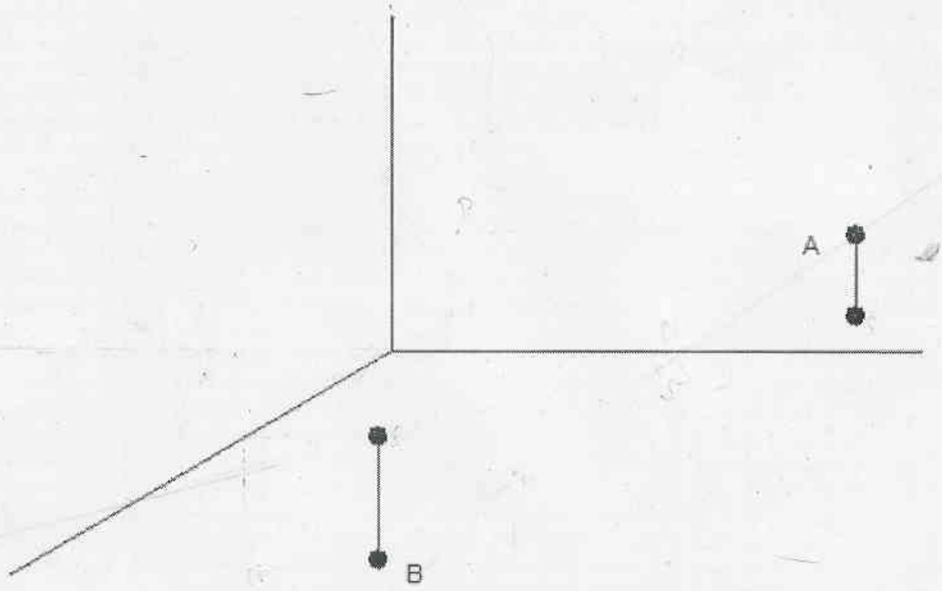
17) Etudier les fonctions a) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ b) $f(x) = \frac{-x^2+2x+8}{2x-1}$ $(f''pas demandé)$

$\cancel{(HELP: f''(x) = \frac{2x}{(x+1)^4})}$

Partie 3 : Géométrie 3D

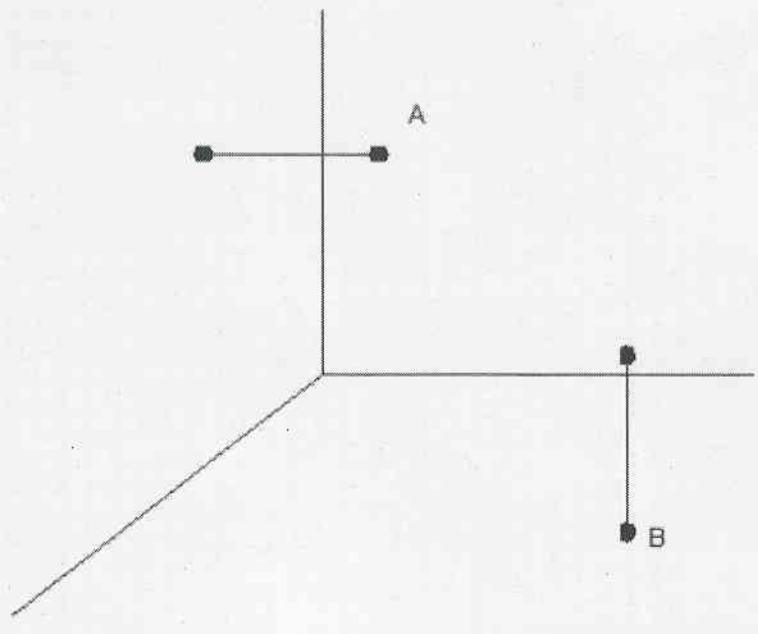
Exercice 1

Soit A et B deux points, ainsi que leur projection dans le sol.
Soit d la droite passant par A et B
Construire la droite d ainsi que ses traces et ses projections



Exercice 2

Soit A un point ainsi que sa projection dans la paroi et B un autre point ainsi que sa projection dans le sol. Soit d la droite passant par A et B
Construire la droite d ainsi que ses traces et ses projections

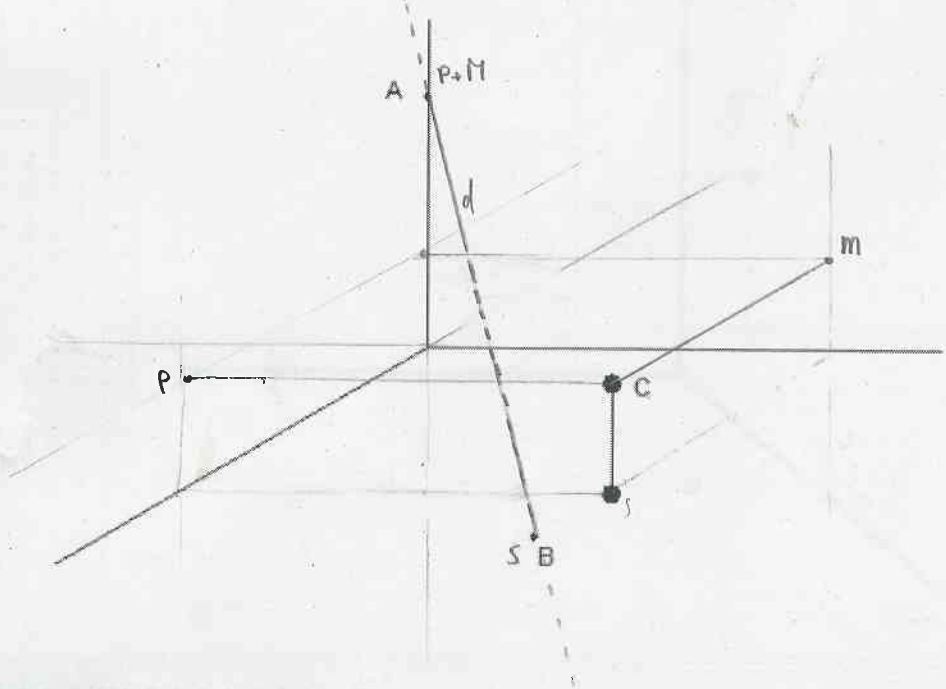


Exercice 3

Soit A $\in O_z$ et B $\in$ sol

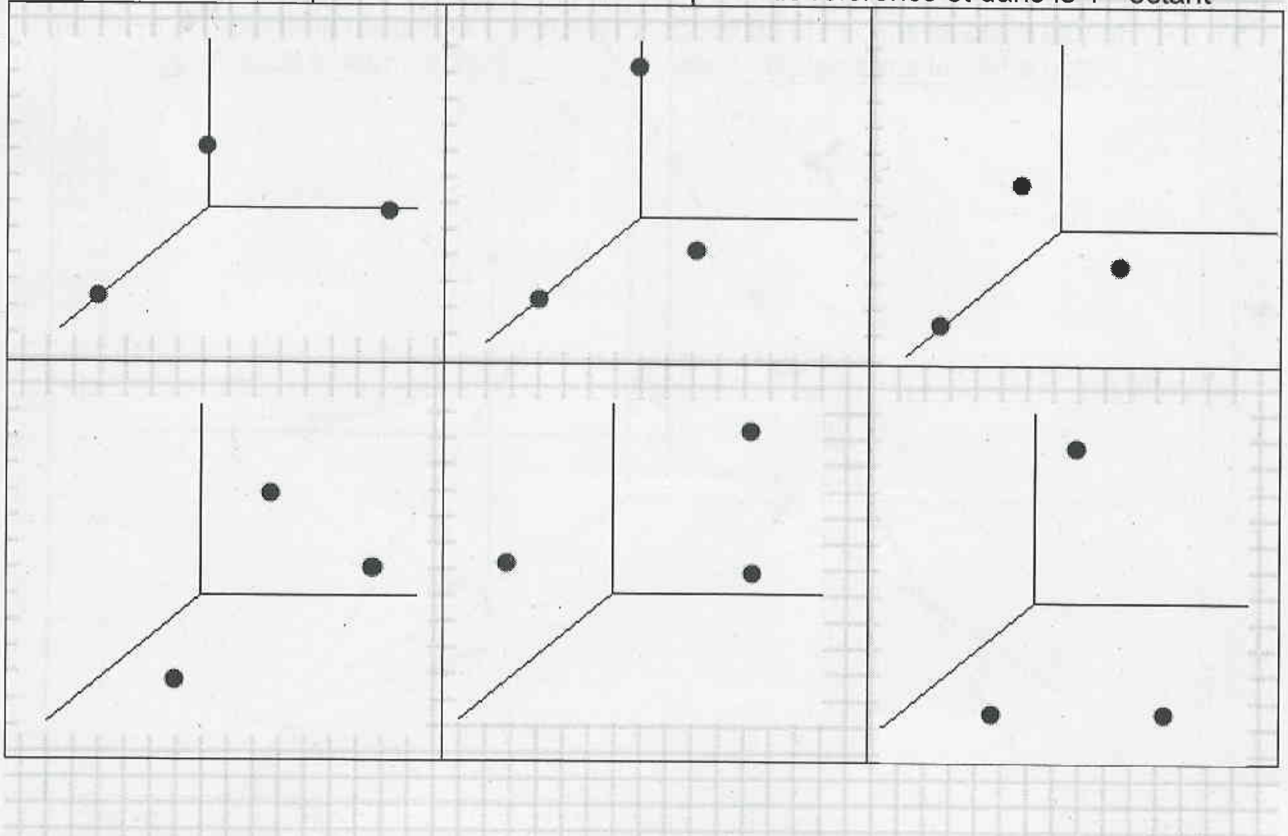
Soit le parallélépipède rectangle de construction du point C. Soit d la droite passant par A et B

Construire la droite d ainsi que ses intersections avec le parallélépipède. On dessinera notamment en traitillés la partie de d à l'intérieur du parallélépipède



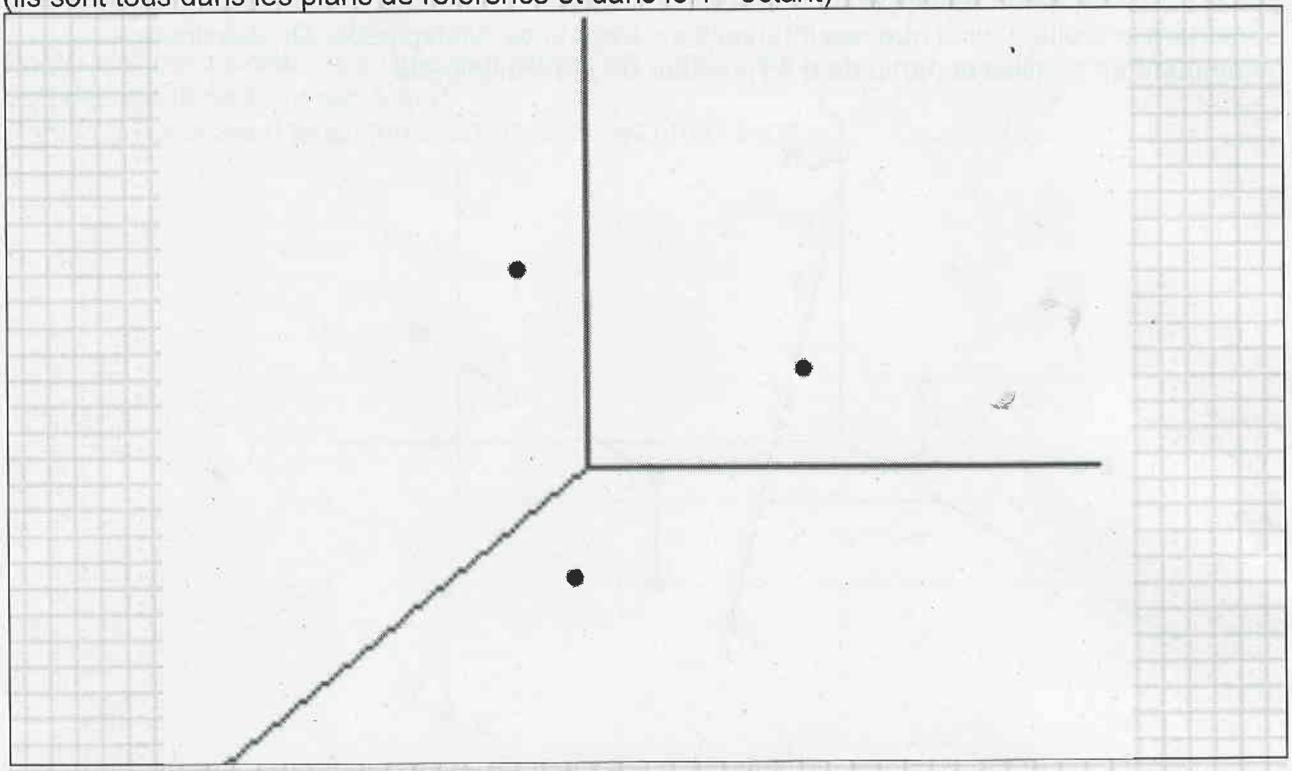
Exercice 4

Dessiner les traces des plans suivants (en respectant les traitillés-traits pleins) dont 3 points sont donnés. Tous les points donnés sont dans les plans de référence et dans le 1er octant



Exercice 4 (suite)

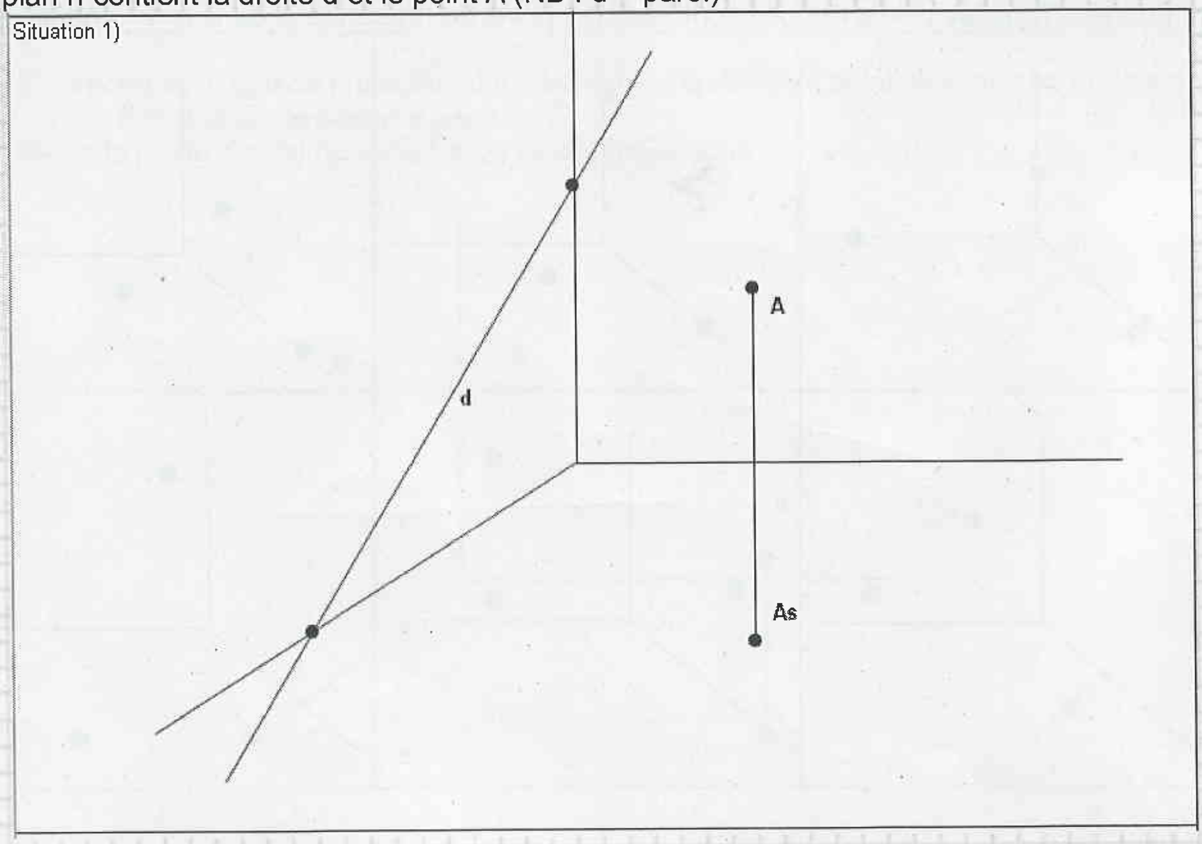
Dessiner les traces du plan (en respectant les traitillés-traits pleins) contenant les points donnés (ils sont tous dans les plans de référence et dans le 1er octant)



Exercice 5

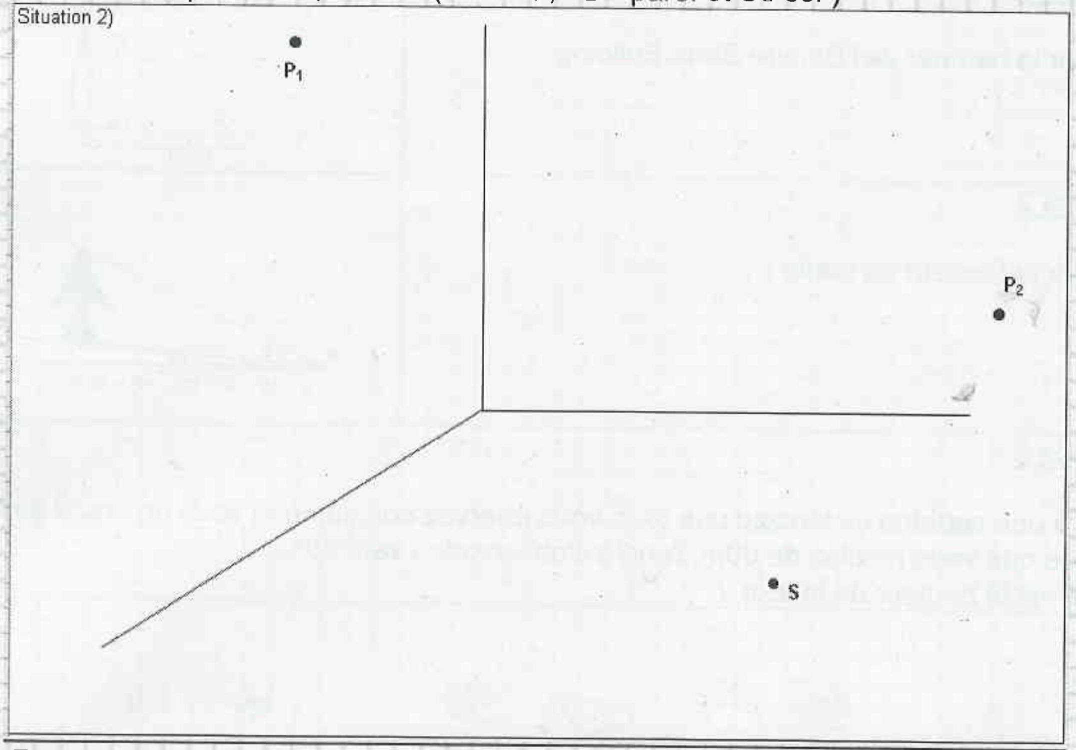
Construire les traces (en couleur SVP) du plan contenant les éléments suivants :

Le plan π contient la droite d et le point A (NB : d ⊂ paroi)



Exercice 6

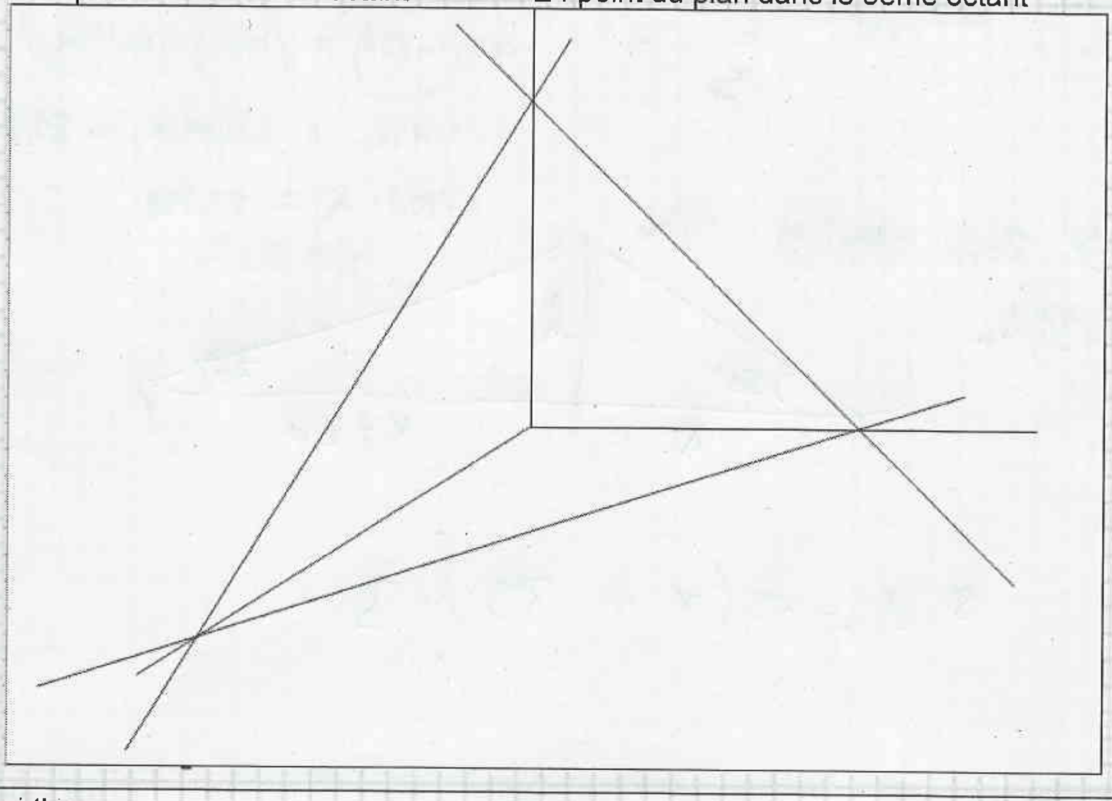
Construire les traces (en couleur SVP) du plan contenant les éléments suivants :
Le plan π contient les points P_1 , P_2 et S (NB : P_1 , $P_2 \in$ paroi et S$\in$ sol)



Exercice 7

Un plan π est donné par ses 3 traces.
Construire 4 points du plan que vous ne pouvez pas choisir sur les plans de référence et que vous appellerez

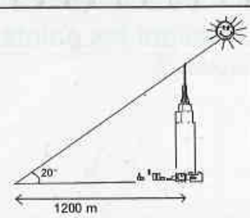
A : point du plan dans le 1er octant
B : point du plan dans le 2ème octant
D : point du plan dans le 4ème octant
E : point du plan dans le 5ème octant



Partie 4 : Trihonométrie

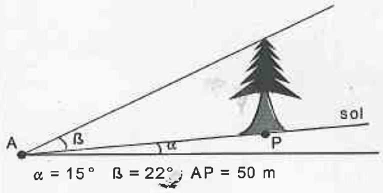
Exercice 1

Calculer la hauteur de l'Empire State Building :



Exercice 2

Calculer la hauteur du sapin :



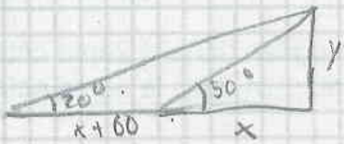
Exercice 3

Placé à une certaine distance d'une tour, vous obervez son sommet sous un angle de 50°.
Lorsque que vous reculez de 60m, l'angle d'observation vaut 20°.
Quelle est la hauteur de la tour ?

Ex 1

$\tan = \frac{opp}{adj}$ $\quad \tan(20°) = \frac{opp}{1200}$ $\quad opp = 436m$

Ex 3



$x \cdot \tan(50) = y \iff (x+60) \cdot \tan(20) = y$

$x \cdot \tan(50) = (x+60) \cdot \tan(20)$

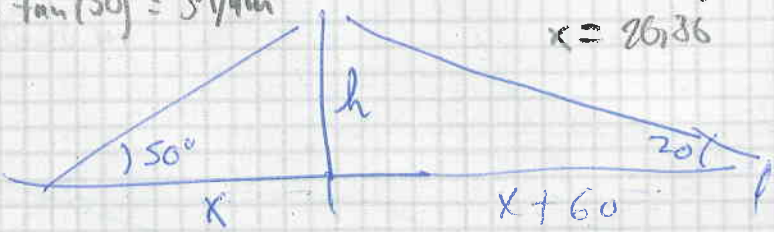
$x \cdot 1{,}1917 = 0{,}3639 \cdot x + 21{,}838$

$0{,}8278 \cdot x = 21{,}838$

$x = 26{,}36$

(3) $26{,}36 \cdot \tan(50) = 31{,}4m$

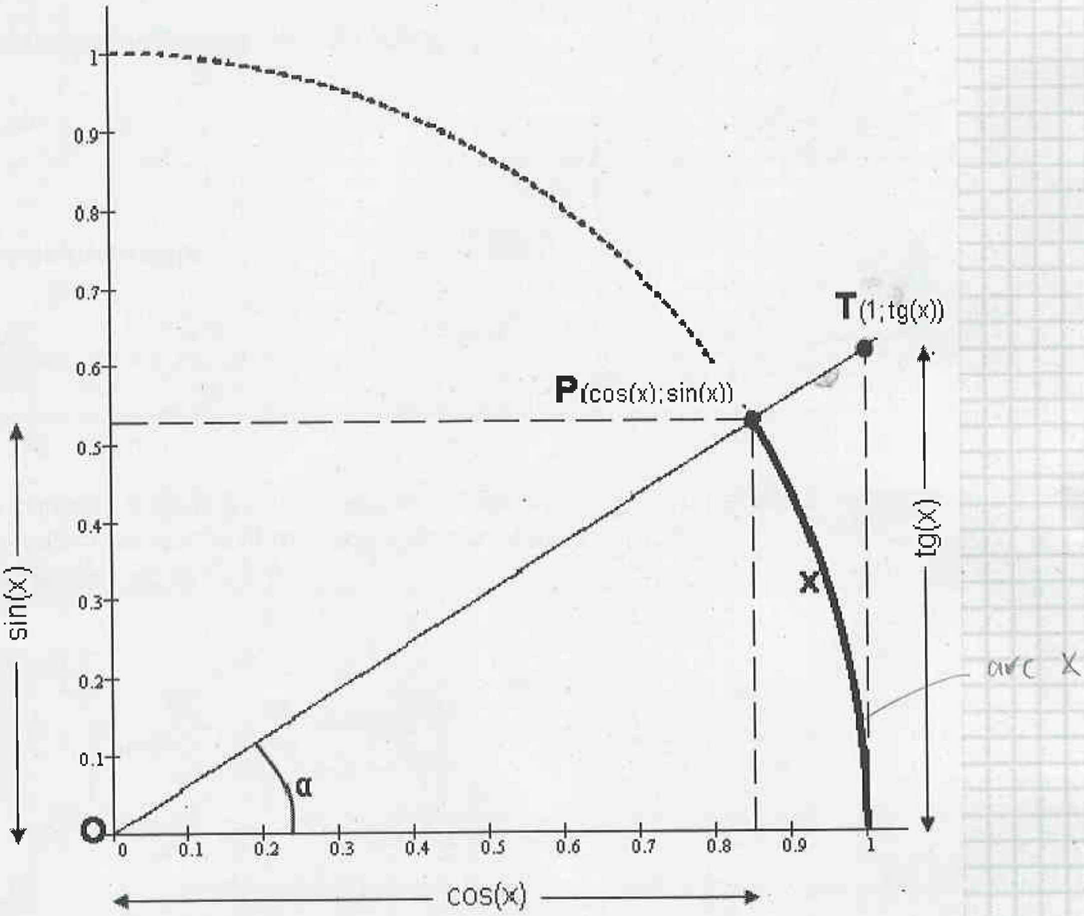
$h = 31{,}4m$



5 x = 2 (x + 35) 3

Exercice 4

Observez et complétez :



Si **x** est l'arc :

P(...; ...) est ....

cos (**x**) est ....

sin (**x**) est est ....

tg (**x**) est est ....

α est ....

Exercice 5

Dessinez le graphe des fonctions cos(x) et sin(x) en choisissant des x entre -3π et $+3\pi$

Dessinez le graphe de la fonction tg(x) en choisissant des x entre -2π et $+2\pi$