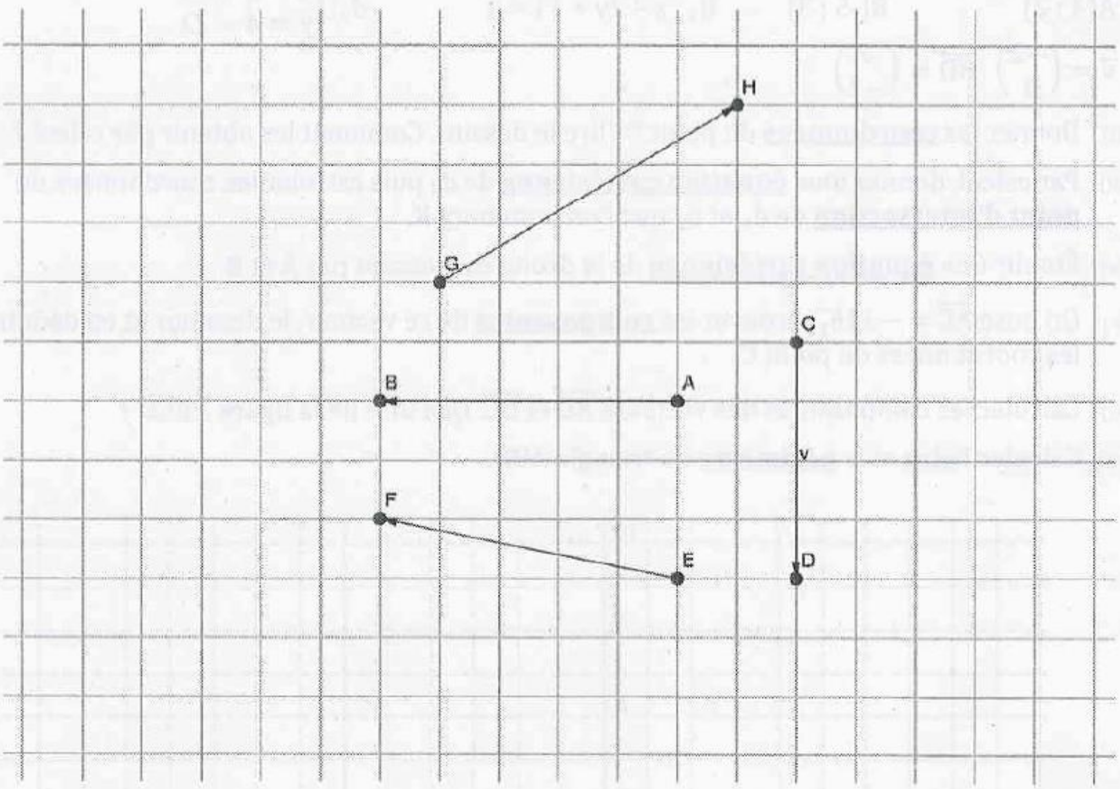
Exercice 1.

Calculez la valeur exacte de :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\,;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}\,;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD};\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH}\,;\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{GH}\,;\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD}\,;\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}.$$



Exercice 2.

Soit les vecteurs : $\vec{a}=\binom{0}{12}$; $\vec{b}=\binom{3}{-2}$; $\vec{c}=\binom{15}{-3}$; $\vec{d}=\binom{2}{3}$.

Calculez :

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=$
2. $\vec{a}\cdot\vec{c}=$
3. $\vec{a}\cdot\vec{d}=$
4. $\vec{c}\cdot\vec{b}=$
5. $\vec{b}\cdot\vec{c}=$
6. $\vec{c}\cdot\vec{d}=$

Exercice 3.

Soit les vecteurs :$\vec{a}=\binom{-8}{-5}$ et $\vec{b}=\binom{1}{0}$.

1. Représentez-les graphiquement.
2. Dessinez la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur la direction de $\vec{b}$.
3. À l'aide de votre dessin, donnez le signe du produit $\vec{a}\cdot\vec{b}$ et dites si l'angle β formé par les eux vecteurs est aigu ou obtus.
4. Calculez $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ainsi que β.

Exercice 4.

(i) Sur le repère ci-dessous, placer les **points**, **droites** et **vecteurs** suivants :

A(4 ; 2) B(-5 ; 3) $d_1 : x - 2y + 11 = 0$ $d_2 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \end{cases}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) Donner les **coordonnées** du point D (lire le dessin). Comment les obtenir par calcul ?

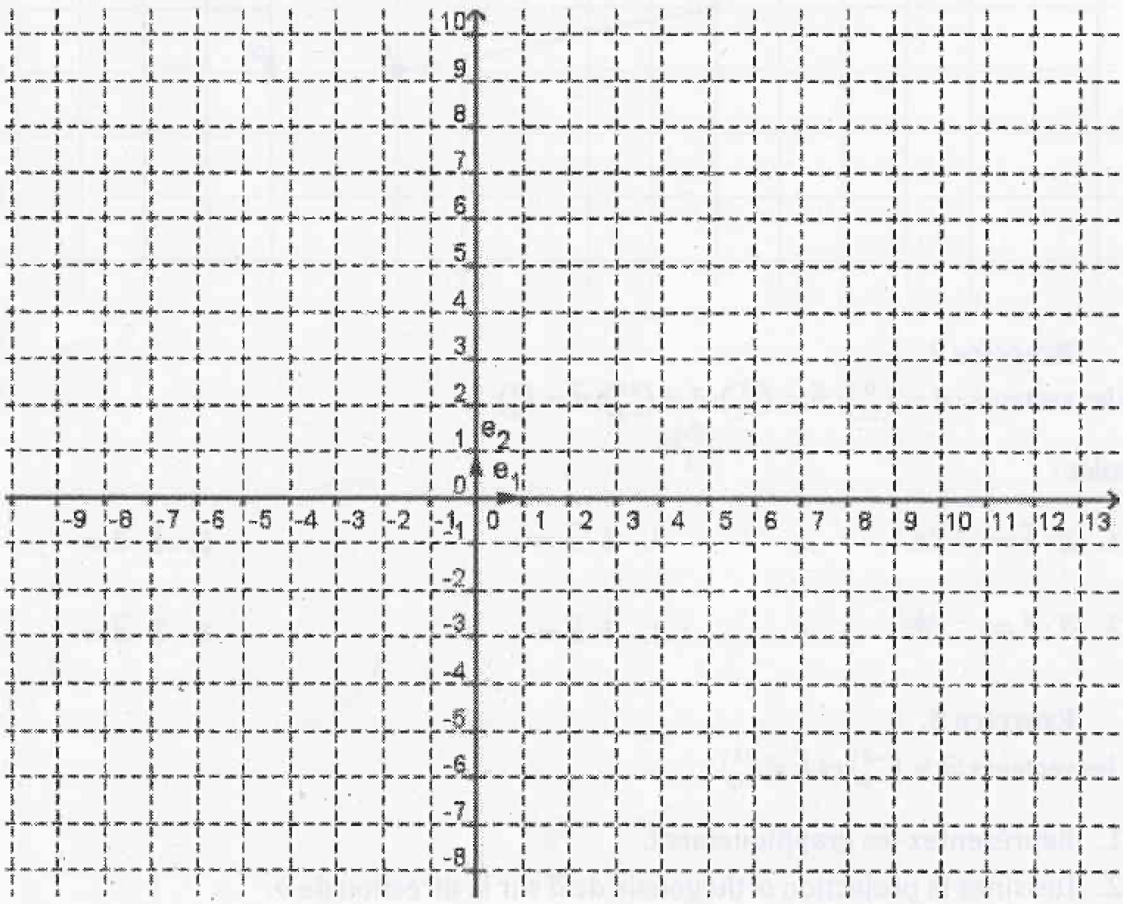
(iii) Par calcul, donner une **équation cartésienne** de d_2 puis calculer les coordonnées du **point d'intersection** de d_1 et d_2 que l'on nommera K.

(iv) Établir une **équation cartésienne** de la droite d_3 passant par A et B.

(v) On pose $\overrightarrow{AC} = -11\overrightarrow{e_1}$: trouver les **composantes** de ce vecteur, le dessiner et en déduire les coordonnées du point C.

(vi) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que dire de la figure ABCD ?

(vii) Calculer l'**aire** et le **périmètre** du triangle ABD.



Exercice 5.

Dans chacune des situations suivantes (1 unité = 1 centimètre) :

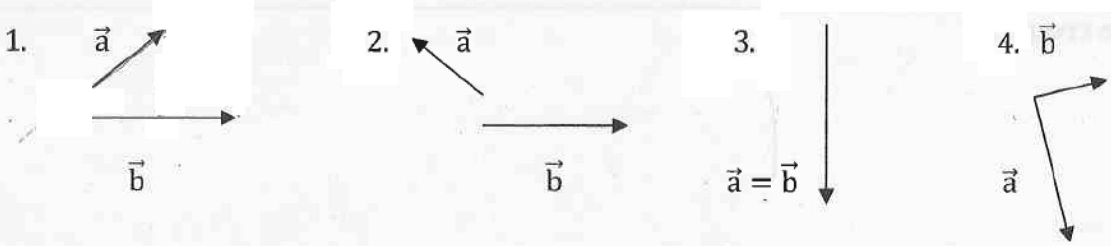
(i) Mesurer les normes $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$

(ii) Mesurer les normes des projections orthogonales $\vec{a}_{\vec{b}}$ et $\vec{b}_{\vec{a}}$

(iii) Calculer le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(iv) Calculer l'angle séparant les deux vecteurs en utilisant le fait que

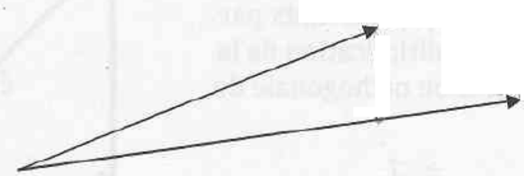
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$



Exercice 6.

Voici une représentation des vecteurs :

$\vec{a} = \binom{5}{2}$ et $\vec{b} = \binom{7}{1}$



(i) <u>Calculer</u> $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$

(ii) <u>Mesurer</u> le plus précisément possible les projections orthogonales a' et b'.

(iii) Déterminer ainsi le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(iv) En observant attentivement le résultat obtenu et les composantes des deux vecteurs, tenter de trouver une méthode **permettant d'obtenir très rapidement** le produit scalaire…

(v) Pour terminer, calculer l'angle séparant ces deux vecteurs (voir exercice 2).

Exercice 7.

On considère le triangle ABC dont les sommets sont A(0 ; 6), B(4 ; 3) et C(-1 ; 0)

(i) Illustrer ce triangle sur un croquis (*« raisonner juste... sur un dessin faux ! »*)

(ii) Donner des équations cartésiennes des droites suivantes :
- d_1 : côté BC ;
- d_2 : médiatrice du côté AB ;
- d_3 : médiane issue de C ;
- d_4 : hauteur du triangle issue de A.

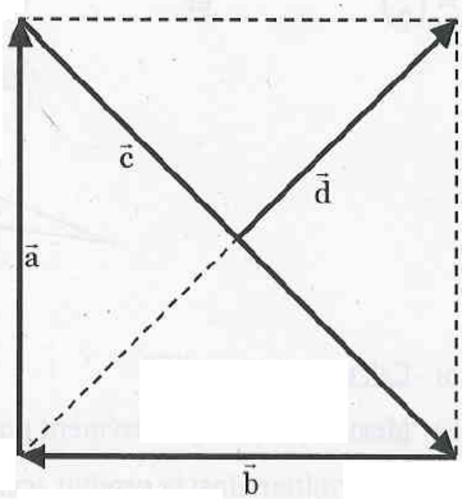
(iii) Calculer la surface du triangle par la méthode du déterminant.

(iv) Calculer cette même surface par la géométrie élémentaire ($S = b \cdot h / 2$).

Zone de croquis

Exercice 8.

Le carré ci-contre a un côté de 6 unités.



(i) Déterminer les produits scalaires suivants par la méthode **<u>géométrique</u>** (multiplication de la norme de l'un par la projection orthogonale de l'autre) :

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{d}$

$\vec{b} \cdot \vec{c}$ $\quad$ $\vec{b} \cdot \vec{d}$ $\quad$ $\vec{c} \cdot \vec{d}$

(ii) Déterminer les composantes de chacun de ces 4 vecteurs (par rapport à la base : $\vec{e_1} = -\vec{b}/6$ et $\vec{e_2} = \vec{a}/6$).

(iii) Vérifier les produits scalaires obtenus au point (i) en travaillant cette fois-ci avec les composantes (méthode **<u>algébrique</u>**).

(iv) Calculer une troisième fois ces produits scalaires en décidant cette fois-ci que la longueur du côté du carré est k (et non plus 6).

Exercice 9.

Considérer les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 9 \end{pmatrix}$

(i) Dans le cas particulier où $x = 2$: calculer leur produit scalaire et l'angle qui les sépare.

(ii) Quelle valeur donner à x pour que ces vecteurs forment un angle droit ?

(iii) Quelle valeur donner à x pour que ces vecteurs soient parallèles ?

(iv) Quelle valeur donner à x pour que l'angle les séparant soit de 135° ?

Solution

i. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 28\,; cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{28}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{85}} \cong 0.56 \Rightarrow \alpha \cong 55.67°.$

ii. $\theta = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot x + 2 \cdot 9 = 0 \; soit \; x = -\frac{18}{5}.$

iii. $\theta = 0° \Leftrightarrow \det(\vec{a}; \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 9 - 2 \cdot x = 0 \; soit \; x = \frac{45}{2}.$

iv. $\theta = 135° \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos135°$ donc :

$$5 \cdot x + 2 \cdot 9 = \sqrt{25 + 4} \cdot \sqrt{x^2 + 81} \cdot cos135°$$

$$(5x + 18)^2 = 29 \cdot (x^2 + 81) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$21x^2 + 360x - 1701 = 0\,; \Delta = 272'484$ et $x_{1,2} = \frac{-360 \pm 522}{42}\,; x_1 = -21$ et $x_2 = \frac{27}{7}.$

Exercice 10.

Considérer les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(v) Dans le cas particulier où $\alpha = 0$: calculer leur produit scalaire et l'angle qui les sépare.

(vi) Quelle valeur donner à α pour que ces vecteurs forment un angle droit ?

(vii) Quelle valeur donner à α pour que ces vecteurs soient parallèles ?

(viii) Quelle valeur donner à α pour que l'angle les séparant soit de 60° ?

Solution

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = -5$ et $cos\theta = \frac{-5}{5 \cdot \sqrt{82}} \Longrightarrow \theta \cong 96{,}34°$

(ii) $\theta = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 5) \cdot 1 + 2\alpha \cdot 9 = 0 \; soit \; \alpha = \frac{5}{19}$

(iii) $\theta = 0° \Leftrightarrow \det(\vec{a}; \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 5) \cdot 9 - 2\alpha = 0 \; soit \; x = \frac{45}{7}$

(iv) $\theta = 60° \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos60°$ donc :

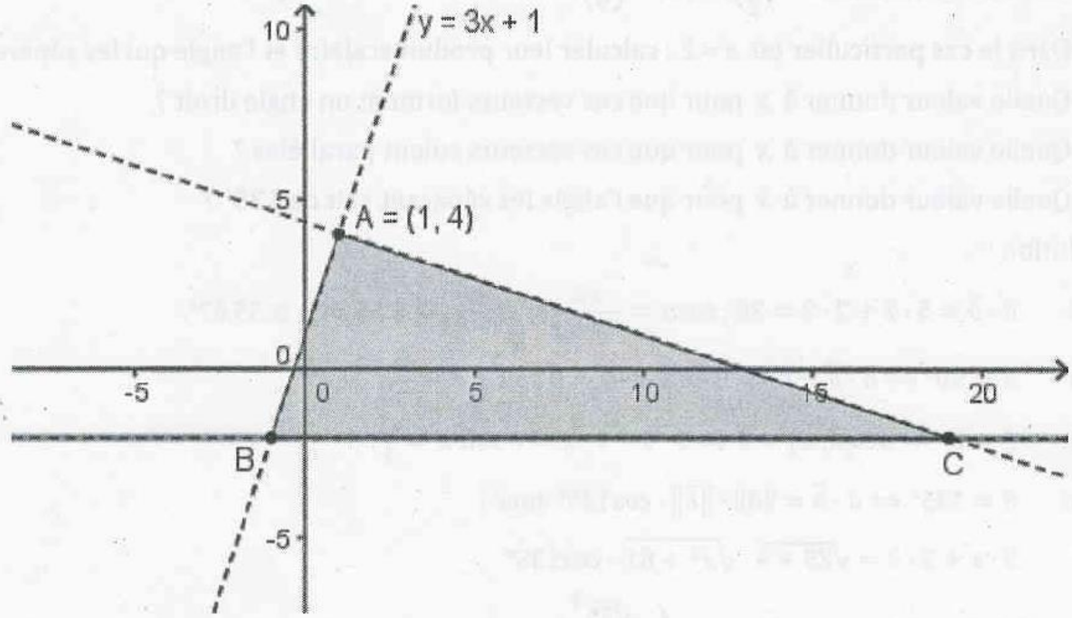
$$(\alpha - 5) \cdot 1 + 2\alpha \cdot 9 = \sqrt{(\alpha - 5)^2 + 4\alpha^2} \cdot \sqrt{1 + 81} \cdot \frac{1}{2}$$

$$(\alpha - 5 + 18\alpha)^2 = (\alpha^2 - 10\alpha + 25 + 4\alpha^2) \cdot (82) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$< q517\alpha^2 + 30\alpha - 975 = 0$$

$\Delta = 2'017'200$ et $\alpha_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{2017200}}{1034} = \frac{-30 \pm 20\sqrt{5043}}{1034} = \frac{-15 \pm 10\sqrt{5043}}{517}.$

Exercice 11.



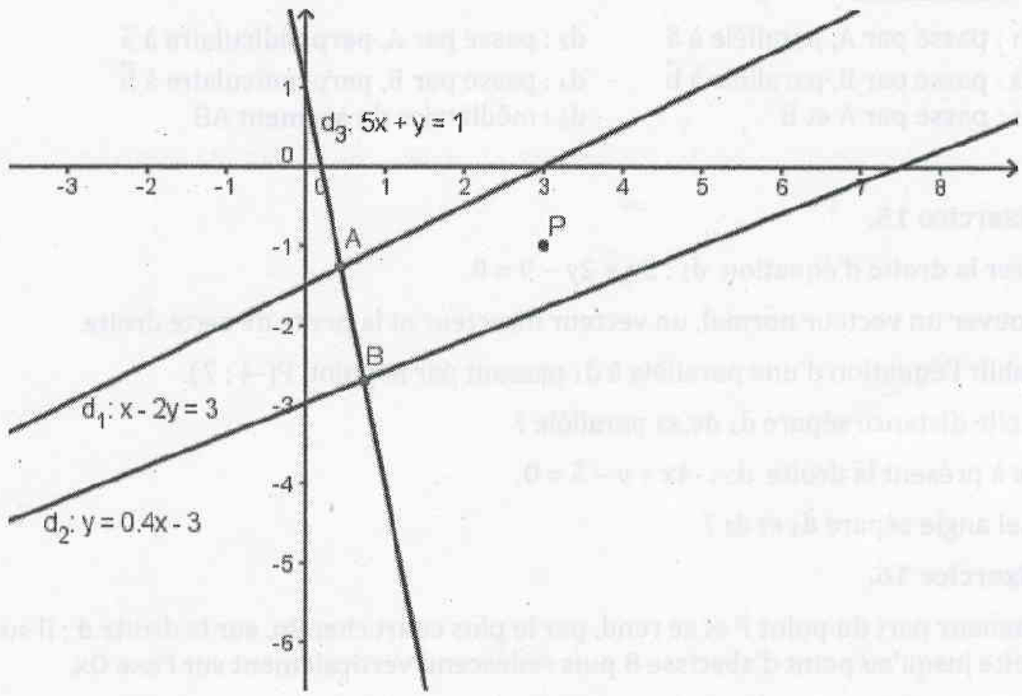
L'illustration ci-dessus présente un triangle rectangle. Le côté BC est horizontal, l'équation du côté AB est donnée ainsi que les coordonnées du point A. L'ordonnée des points B et C vaut -2.

Par calcul, **retrouver toutes les informations manquantes** (coordonnées des sommets, équations des côtés, mesure des angles, longueur des côtés, périmètre et surface) !

Exercice 12.

Soit les 3 droites suivantes :

$d_1 : x - 2y = 3$ $d_2 : y = \frac{2}{5}x - 3$ $d_3 : 5x + y = 1$



(i) Pour chacune d'entre-elle, donner la ***pente***, un ***vecteur directeur*** et un ***vecteur normal***.

(ii) Par calcul, trouver les coordonnées des points A et B ainsi que la distance séparant ces deux points.

(iii) Calculer l'angle séparant les droites d_1 et d_2.

(iv) Nommons C le point d'intersection de d_1 et d_2 : calculer la surface du triangle ABC.

Ajoutons à présent le point P(3 ; -1).

(v) Donner l'équation d'une **perpendiculaire à d_1** passant par P ; nommons-la p_1. Esquisser cette droite sur le dessin.

(vi) Calculer les coordonnées du point P' situé à l'intersection de d_1 et de p_1.

(vii) Calculer la distance séparant P de P'.

Exercice 13.

Considérer le point A(4 ; 5) et la droite d : y = 4x – 1.

(i) Donner une équation de la droite p, perpendiculaire à d et passant par A.

(ii) Chercher les coordonnées du point A', intersection de d et de p.

(iii) Calculer la distance séparant A et A'.

<u>Rappel</u> : la distance AA' correspond à la distance entre le point A et la droite d.

(iv) Donner l'équation hessienne de la droite d.

(v) Remplacer les coordonnées du point A dans le membre de gauche de l'équation hessienne de la droite d et commenter le résultat obtenu.

Exercice 14.

Considérer les points A(-1 ; 5) et B(3 ; 3) ainsi que les vecteurs $\vec{a} = \binom{1}{7}$ et $\vec{b} = \binom{-4}{5}$.

Trouver **rapidement** des équations cartésiennes des 6 droites suivantes :

d_1 : passe par A, parallèle à $\vec{a}$ d_2 : passe par A, perpendiculaire à $\vec{a}$
d_3 : passe par B, parallèle à $\vec{b}$ d_4 : passe par B, perpendiculaire à $\vec{b}$
d_5 : passe par A et B d_6 : médiatrice du segment AB

Exercice 15.

Considérer la droite d'équation $d_1 : 5x + 2y - 9 = 0$.

(i) Trouver un vecteur normal, un vecteur directeur et la pente de cette droite.

(ii) Établir l'équation d'une parallèle à d_1 passant par le point P(-4 ; 7).

(iii) Quelle distance sépare d_1 de sa parallèle ?

Ajoutons à présent la droite $d_2 : -4x + y - 5 = 0$.

(iv) Quel angle sépare d_1 et d_2 ?

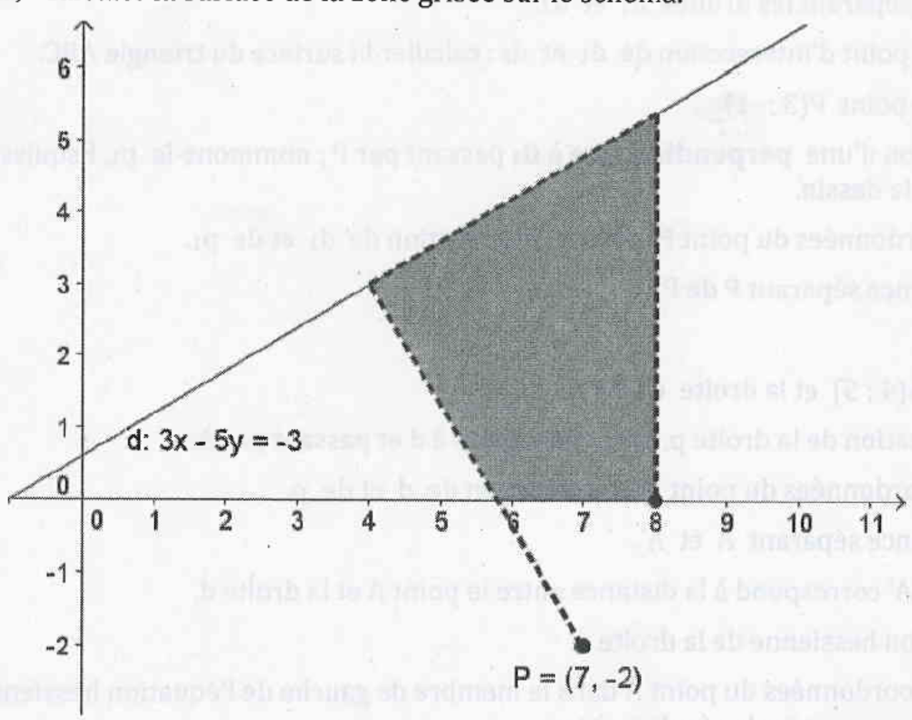
Exercice 16.

Un promeneur part du point P et se rend, par le plus court chemin, sur la droite d ; il suit alors cette droite jusqu'au point d'abscisse 8 puis redescend verticalement sur l'axe Ox.

(i) Quelle est la longueur du chemin ainsi parcouru ?

(ii) Une fois arrivé à destination, à quelle distance se trouve-t-il de la droite d ? Et quelle distance le sépare de son point de départ ?

(iii) Calculer la surface de la zone grisée sur le schéma.



Exercice 17.

Trouver des points satisfaisant l'équation **$x^2 + y^2 = 25$** et représenter graphiquement, dans un système d'axes, cet ensemble de solutions.

Exercice 18.

Équation donnée	Est-ce un cercle ?	centre	rayon
$x^2 + y^2 = 10$			
$x^2 - y^2 = 100$			
$x^2 + y^2 - 8x + 18y + 16 = 0$			
$x^2 + y^2 = 144$			
$x^2 + y^2 + 11 = 7x$			
$-2x^2 - 2y^2 + 14x - 5y = 0$			
$x^2 + 3y^2 = 9$			
$x^2 + y^2 - 10x + 7y + 11 = 0$			

Exercice 19.

Équation donnée	**Équations paramétriques**	**Coordonnées du centre**	**rayon**
$x^2 + y^2 = 10$			
$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$			
		$(5;-2)$	4
	$\begin{cases} x = 10 + 3sin\alpha \\ y = -1 + 3cos\alpha \end{cases}$		
$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 40 =$			
	$\begin{cases} x = 1 + sin\alpha \\ y = 3 + cos\alpha \end{cases}$		
	$\begin{cases} x = -2 + \sqrt{7}sin\alpha \\ y + 5 = 3 + \sqrt{7}cos\alpha \end{cases}$		

Exercice 20.

(i) Donner l'équation cartésienne d'un cercle de centre K (3 ; -5) et de rayon r = 6.

(ii) Soit A(0 ;3) et B(-4 ;-11). Déterminez l'équation du cercle $\mathcal{C}$ ayant diamètre AB.

(iii) - Trouver le centre K et le rayon du cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $\mathbf{(x + 4)^2 + (y + 1)^2 - 121 = 0}$.
- Calculer les coordonnées des points P_1 et P_2, intersection de ce cercle avec l'axe Ox.
- Que valent $\|\overrightarrow{KP_1}\|$ et $\|\overrightarrow{KP_2}\|$?

(iv) Soit le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $\mathbf{x^2 - 6x + y^2 + 4y - 12 = 0}$.

Calculez le rayon et les coordonnées de son centre K.

(v) Calculer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C}$ d'équation

$\mathbf{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25}$ et la droite d d'équation $\mathbf{7x - y + 12 = 0}$.

(vi) Déterminer l'équation de la droite t : tangente au cercle précédent au point P(5 ; -3).

TEST

1. Donnez le rayon et les coordonnées du centre des cercles d'équation :

$$C_1: (x+13)^2 + (y-1)^2 = 11$$
$$C_2: x^2 + y^2 - 15x + 16y + 1 = 3$$
$$C_3: 3x^2 + 3y^2 - x = 0$$

2. Soit $C: x^2 + y^2 - 2x + 8y = 19$.

   Calculez les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes.

3. Soit $C: x^2 + y^2 - 2y + 1 = 25$ et $d: y = \frac{2}{3}x+1$.

   Donnez-en une représentation graphique et calculez les coordonnées de leurs points communs.

Exercice 21.

On considère les points $A(7\,;-1)$, $B(6\,;4)$ et $C(4\,;-4)$. Le but est d'établir l'équation de l'unique cercle passant par ces trois points.

(i) Établir l'équation de la médiatrice de AB ;

(ii) Établir l'équation de la médiatrice de BC ;

(iii) Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux médiatrices (il s'agit du centre du cercle recherché !)

(iv) Calculer le rayon du cercle et établir son équation.

(v) Vérifier que les points A, B et C appartiennent bien au cercle trouvé.

Exercice 22.

Considérons les cercles suivants :

$C_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ $\qquad$ $C_2 : (x-2)^2 + (y-14)^2 = 169$

(i) Déterminer le centre et le rayon de chaque cercle.

(ii) Calculer la distance séparant les deux centres. Les cercles se coupent-ils ?

(iii) Donner l'équation de l'axe radical de ces cercles.

<u>*Rappel théorique*</u> *: il s'agit d'une droite dont l'équation s'obtient par égalisation des équations cartésiennes des cercles. Si les cercles se coupent, l'axe radical passe nécessairement par les points d'intersections.*

(iv) Calculer les points d'intersection entre C_1 et l'axe radical.

(v) Vérifier que les deux points obtenus appartiennent bien également à C_2.

Exercice 23.

Déterminer les équations cartésiennes des cercles suivants :

(i) Centré à l'origine et de rayon 4 ;

(ii) De centre $C(4\,;-2)$ et de rayon 3 ;

(iii) De centre $C(5\,;-6)$ et passant par l'origine ;

(iv) De centre $C(-4\,;5)$ et passant par le point $A(1\,;-2)$;

(v) De diamètre AB avec $A(3\,;2)$ et $B(-1\,;6)$;

(vi) Centré à l'origine et tangent à la droite $3x + 4y - 15 = 0$;

(vii) De centre $C(1\,;-1)$ et tangent à la droite $5x - 12y + 9 = 0$;

(viii) Passant par les points $A(3\,;1)$ et $B(-1\,;3)$ et ayant son centre sur la droite $3x - y - 2 = 0$;

(ix) Passant par les points $A(-1\,;5)$, $B(-2\,;-2)$ et $C(5\,;5)$.

Exercice 24.

Pour quelle valeur de m la droite **y = mx** est-elle tangente au cercle $\mathbf{(x-5)^2 + y^2 - 9 = 0}$?

Exercice 25.

On considère le cercle de rayon 5 centré en (2 ; 3).

(i) Vérifier que $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y = 24$ est bien une équation de ce cercle !

(ii) Donner l'équation de la tangente à ce cercle au point (6 ; 0).

(iii) Chercher la distance séparant ce cercle de la droite $x + 3y - 58 = 0$; la droite coupe-t-elle le cercle ?

(iv) Chercher un point du cercle d'abscisse égale à 4, ainsi que le point diamétralement opposé.

Exercice 26.

On considère le cercle d'équation : $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 5$.

On considère les tangentes t_1 et t_2 issues des points du cercle d'abscisse 4 : déterminer leurs équations cartésiennes et la grandeur de l'angle qu'elles forment.

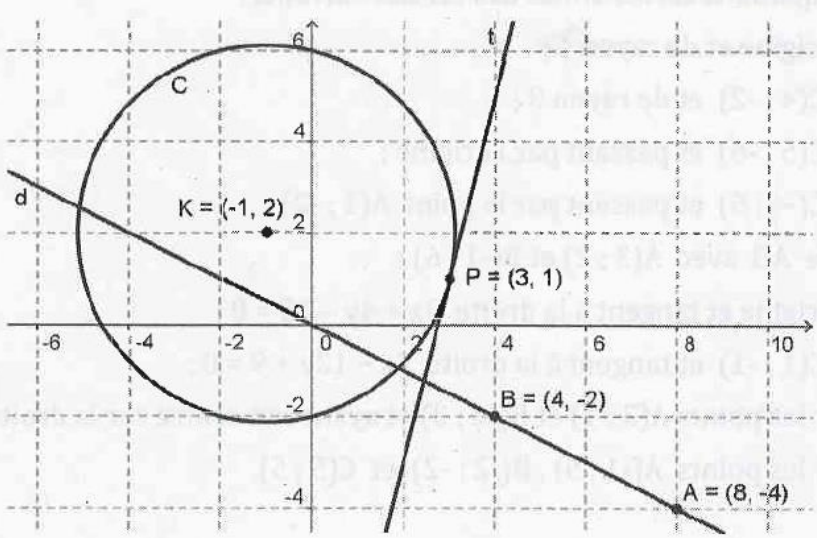
Exercice 27.

On donne le triangle ABC où : $A(2\,;3)$, $B\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $C(1;-4)$.

Déterminez l'équation du cercle circonscrit à ABC .

Exercice 28.

Déterminer les équations et les intersections des objets représentés sur ce schéma ainsi que l'angle formé par les deux droites.



Exercice 29.

Recherchez centre et rayon de chaque cercle (si ce dernier est réel) :

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + x - 4 = 0$$

$$C_3: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$$

$$C_4: x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$C_5: 9x^2 + 9y^2 - 8 = 0$$

$$C_6: 5x^2 + 5y^2 - 12x = 0$$

Exercice 30.

Déterminez les valeurs réelles de k afin que la droite $t: y = k$ soit tangente au cercle

$$C: x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0.$$

Exercice 31.

Calculez les pentes des tangentes au cercle $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ issues du point $A(6\,; -1)$. Vérifiez que ces tangentes sont perpendiculaires entre elles.

Exercice 32.

Calculez l'équation des droites tangentes au cercle : $x^2 + y^2 - 20x - 6y + 93 = 0$ passant par $P(-7\,; 2)$.

Exercice 33.

a) Trouver le centre et le rayon du cercle donné par : $x^2 - 4x + y^2 + 3y = 0$.

b) Trouver les tangentes à ce cercle, parallèles au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34.

Donnez l'équation du cercle dont le centre est situé sur O_x et sur $d: x - 2y + 4 = 0$ et passant par $A(1; -1)$.

Exercice 35.

Soit la droite $d: 5x + 2y - 13 = 0$ et le cercle $C: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$.
Déterminez l'équation de la droite perpendiculaire à d supportant le diamètre du cercle.

Exercice 36.

Déterminez la plus courte distance du point $A(6\,; -8)$ au cercle $x^2 + y^2 = 9$.

Exercice 37.

Pour quelles valeurs de k, $x^2 + y^2 + 2y + k = 0$ est-elle l'équation d'un cercle ?

Exercice 38.

Soit Ω un cercle de centre $K(4\,;\,0)$ et de rayon $r = \sqrt{10}$

$d_1: x + 3y + 6 = 0$ et $d_2: 2x - y - 3 = 0$

Calculez les coordonnées de $: \Omega \cap O_x; \Omega \cap O_y\,; \Omega \cap d_1\,; \Omega \cap d_2$.

Exercice 39.

Soit les cercles $C_1: x^2 - 8x + y^2 + 10y = 0$ et $C_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$.

1. Calculez les coordonnées des points communs à C_1 et C_2 ;
2. calculez l'aire commune aux deux cercles ;
3. esquissez la situation.

Exercice 40.

Soit les droites $d_1: 3x = -6$ et $d_2: x = 6$ ainsi que le cercle C ayant centre sur $d: y = x + 9$ et tangent aux droites d_1 et d_2.

1. Donnez la mesure du diamètre de C ;
2. Calculez les coordonnées du centre K du cercle C;
3. Donnez l'équation du cercle C.
4. Calculez l'aire exacte de la surface délimitée par : l'axe des abscisses, le cercle C, les droites d_1 et d_2 ;
5. Déterminez l'équation des droites issues de R(9 ;9) et formant un angle de 60° avec les droites d_1 et d_2 .