Géométrie dans l'espace

Chapitre 3

EXERCICES

Mathématiques-2M
Lycée Jean-Piaget
V.SABBAH

Représentation de points

Exercice 1 :

Placer dans le système d'axes donné les points
A(4 ; 5; 8) , B(3 ; 7 ; -2), C(-2 ; -4 ; 6) , D(-1 ; -3 ; -1) , E(0 ; 8 ; 3) , F(-6; -5; -1,5) et G(10 ; 14 ; 3)

Exercice 2 :

Pour chaque octant, donner les **signes** des coordonnées d'un point selon l'exemple

1er octant (+ ; + ; +)	5ème octant (; ;)
2ème octant (; ;)	6ème octant (; ;)
3ème octant (; ;)	7ème octant (; ;)
4ème octant (; ;)	8ème octant (; ;)

Exercice 3 :

Prendre la feuille annexée pour répondre aux questions.

1. Le point A peut-il être dans le 7ème octant ? Si oui, donner un triplet possible de coordonnées.
2. Le point B peut-il être en dessous du sol s'il est derrière le mur? Si oui, donner un triplet possible de coordonnées.
3. Les points E et F peuvent-ils être à la même hauteur par rapport au sol ?
4. Le point E peut-il être dans le 6ème octant ?
5. Le point D peut-il être plus haut que le point G par rapport au sol ?
6. Dans quel octant le point C peut-il se trouver
7. Le point G peut-il être dans la paroi ?
8. Quelles sont les coordonnées du point E s'il est dans le sol ?
9. Le point F peut-il être dans le mur ?
10. Le point E peut-il être dans le 7ème octant ?

Exercice 4 :

Dans un système d'axes de votre choix, placer les points A(4 ; 5 ; 6), B(2 ; 9 ; -2) et C(-4, -5, 6)
Dessiner les projections de ces points dans les plans de référence sol, mur et paroi.
Dessiner les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

Exercice 5 :

Sur la feuille annexée, rechercher par le dessin la coordonnée manquante des points :

A(-2; 3 ; z_A) B(4 ; y_B ; 5) et C(x_c ; 7 ; 5)

Exercice 6 :

Soit les points A(4 ; -3 ; 7) et B(-2 ; 4 ; 3)

Dessiner la droite d(A;B) et rechercher par le dessin ses traces (points auxquels la droite *traverse*) dans les plans de référence.

Exercice 7 :

1) Dessiner la droite d(A;B) avec A(6 ; -3 ; 8) et B(-2 ; 5 ; 8).

2) Dessiner la droite d(C;D) avec C(4 ; 6 ; -3) ; D(4 ; 6 ; 9).

3) Dessiner la droite d(E;F) avec E(2 ; 4 ; -3) , F(-4 ; -8 ; 6) .

Chercher des conventions de dessin qui permettent de voir quelles parties des droites sont "visibles" dans le premier octant et admettant que les plans de référence sont "transparents" mais "opaques".

Donner toutes les informations possibles pour exprimer la position de ces droites par rapport aux plans de référence.

Exercice 8 :

Soit les points A(6 ; -4 ; -3) et B(-2 ;8 ; 7)

1) Dessiner la droite d(A;B) en respectant les conventions d'écriture retenues après l'exercice 6.

2) Rechercher par le dessin z_C sachant que C(4 ; -1 ; z_C) $\in$ d(A;B).

3) Peut-on compléter D(-4 ; y_D ; z_D) sachant que D $\in$ d(A;B) ?

Exercice 9 :

Dessiner d(A;B) avec A(-2 ; -4 ; 5) et B(6 ; 8 ; -2)

Dessiner d(C;D) avec C(8 ; -2 ; 1) et D(1 ; 7 ; 6)

Les droites se coupent-elles?

Dessins de droites

Droite 1

On donne deux points : $P_1\ (1; 2; 1)$ et $P_2\ (-2; 1; 2)$

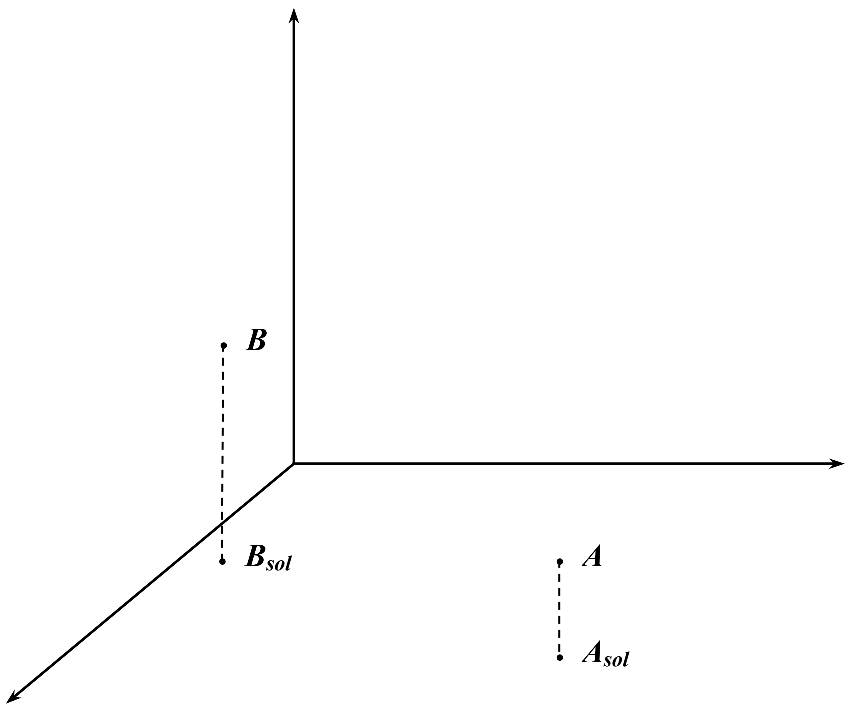
i) Dessinez la droite passant par P_1 et P_2 , ses trois projections, ainsi que P_1 et P_2 et leurs projections.

ii) Déterminez à l'aide de ce dessin les coordonnées des traces de ces deux droites.

Droite 2

1) Dans quels octants passe la droite qui contient A et B ?

2) Dessinez cette droite en distinguant ses parties dans les différents octants.



Droite 3

i) Dans combien d'octants au maximum une droite qui ne coupe aucun des axes peut-elle passer? Et au minimum ?

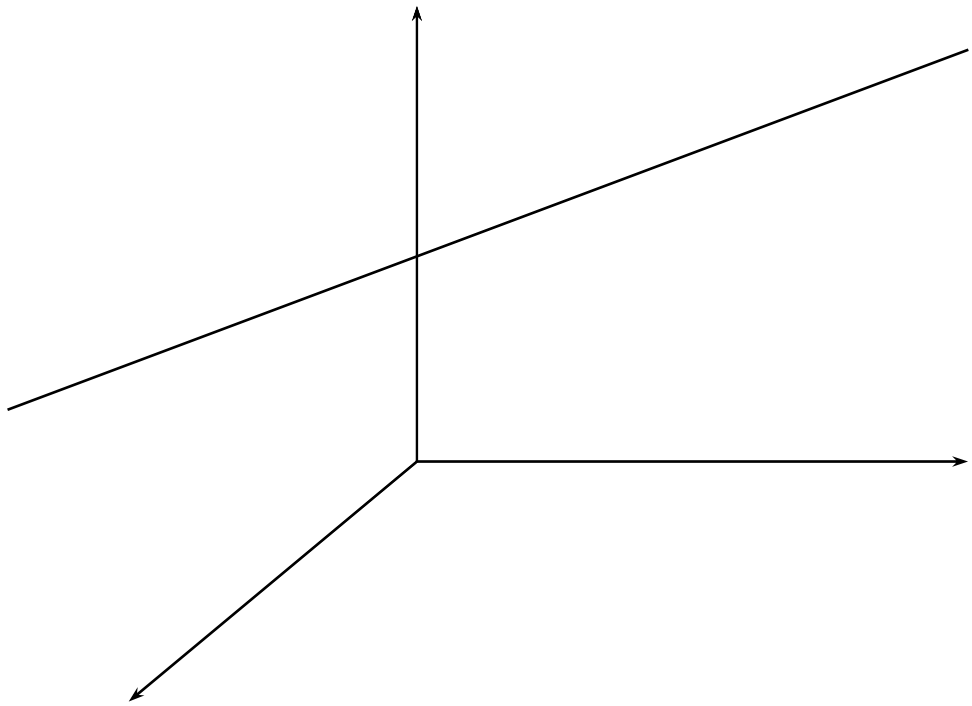
ii) Quel est le cas (de loin !) le plus probable ?

Droite 4

i) Dessinez les trois projections d'une droite ***d*** dont les traces dans le mur et dans la paroi sont $T_{d\ mur}(0;5;7)$ et $T_{d\ paroi}(2;0;3)$.

ii) Construisez ensuite la trace de ***d*** dans le sol.

Droite 5



i) La trace d'une telle droite dans le sol peut-elle être visible?

ii) Dessinez la projection dans le sol d'une telle droite pour que ses traces dans le mur et dans la paroi soient visibles.

iii) Dessinez la projection dans le sol d'une telle droite pour que ses traces dans le mur et dans la paroi soient invisibles.

iv) Dessinez la projection dans le sol d'une telle droite pour que sa trace dans le mur soit visible et que sa trace dans la paroi soit invisible.

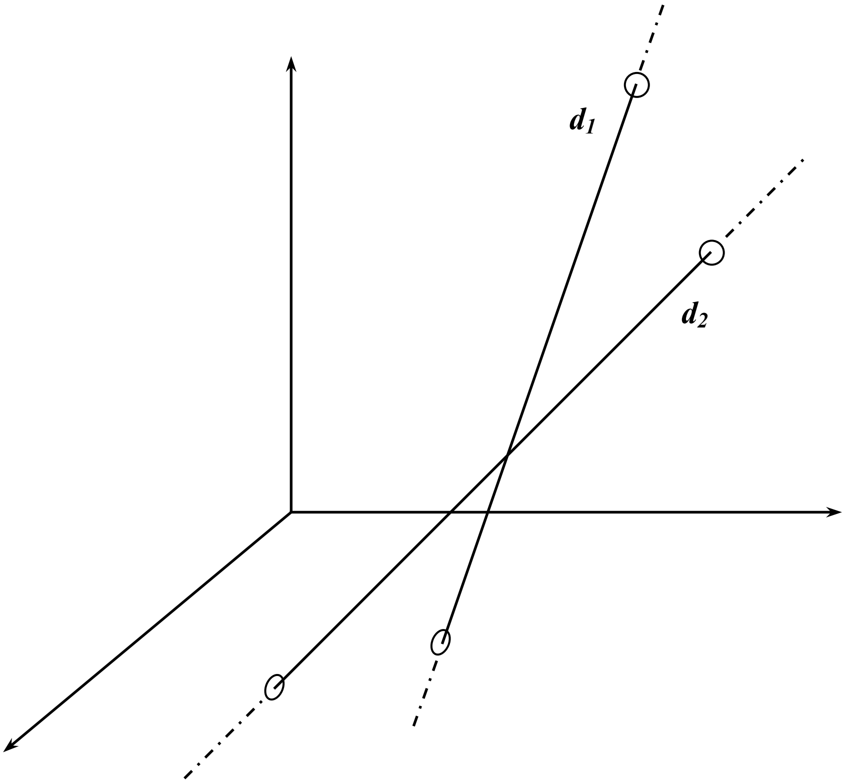
v) Dessinez la projection dans le sol d'une telle droite pour que sa trace dans le mur soit invisible et que sa trace dans la paroi soit visible.

Droite 6

i) À quoi reconnaît-on qu'une droite est verticale ? Dessinez des exemples.

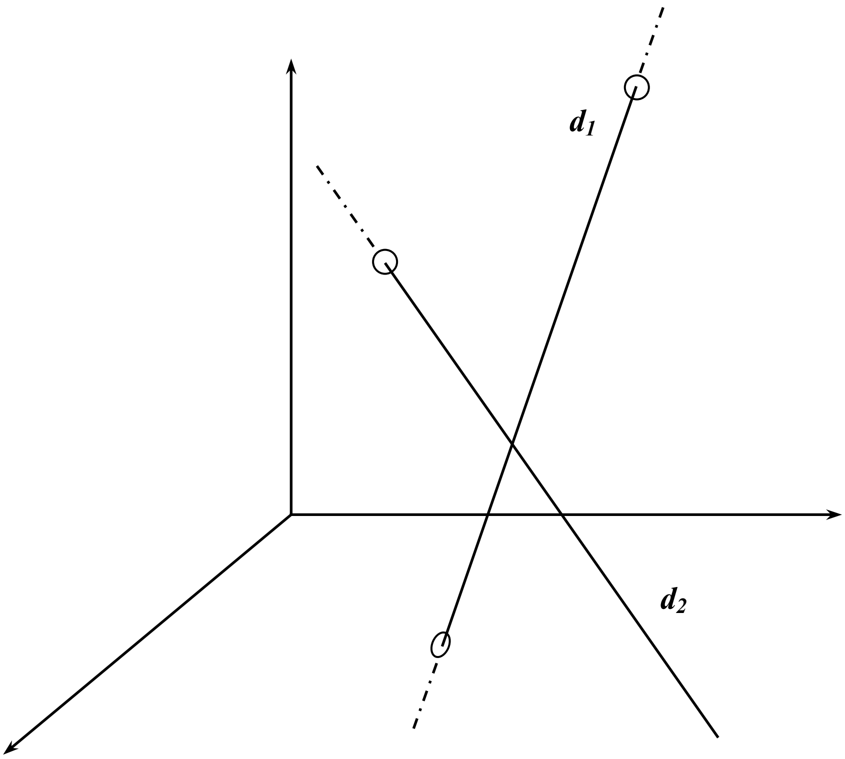
ii) À quoi reconnaît-on qu'une droite est horizontale ? Dessinez des exemples.

Droite 7



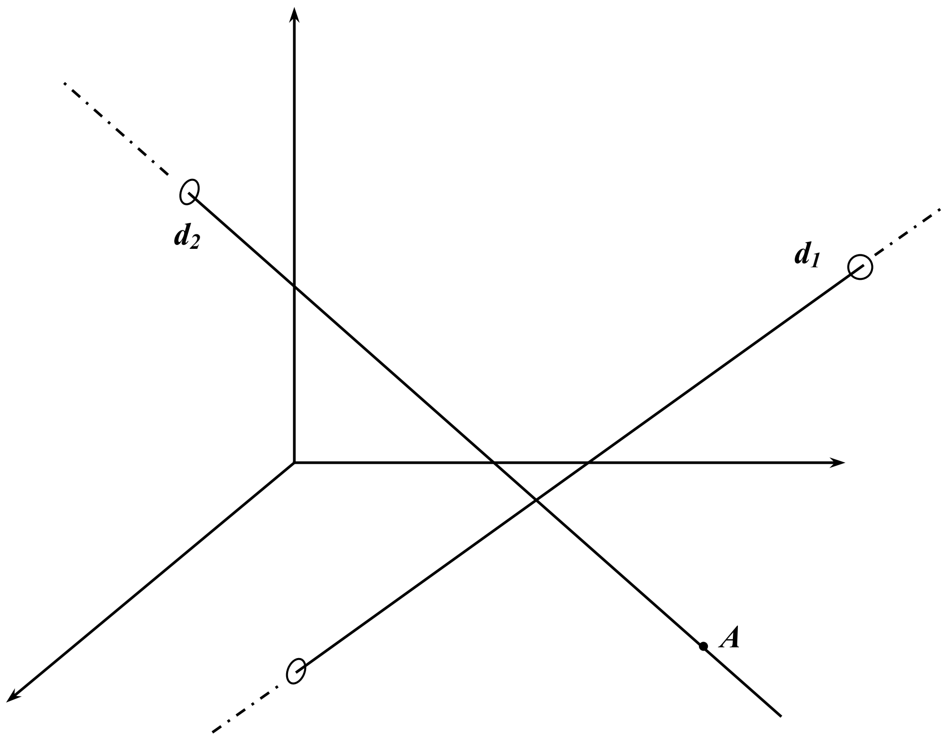
d_1 et ***d_2*** se coupent-elles ?

Droite 8



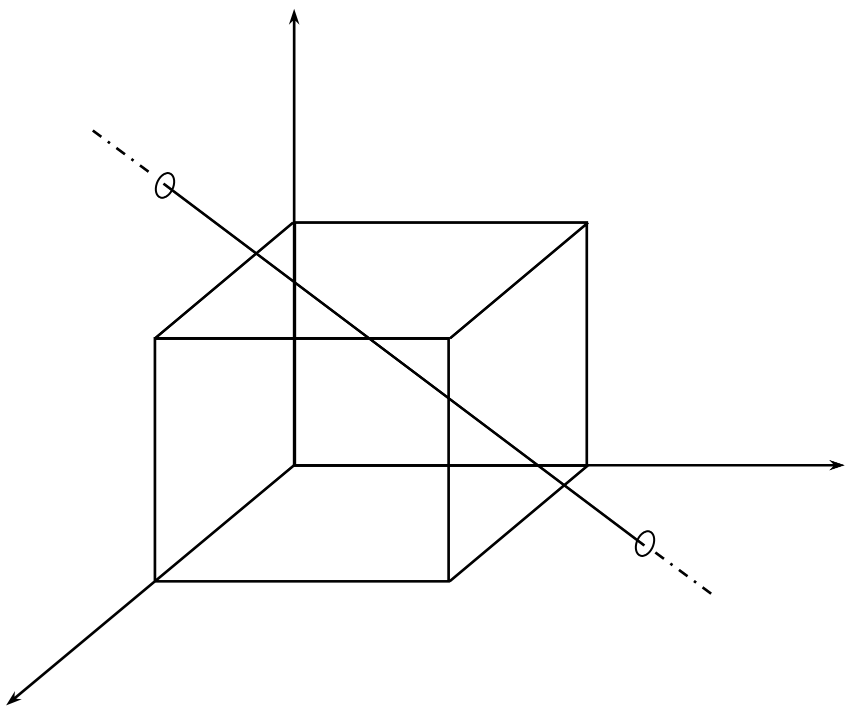
Placez la trace dans le sol de ***d_2*** pour que ***d_1*** et ***d_2*** se coupent.

Droite 9



Placez la projection de ***A*** dans le sol pour que $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ se coupent.

Droite 10

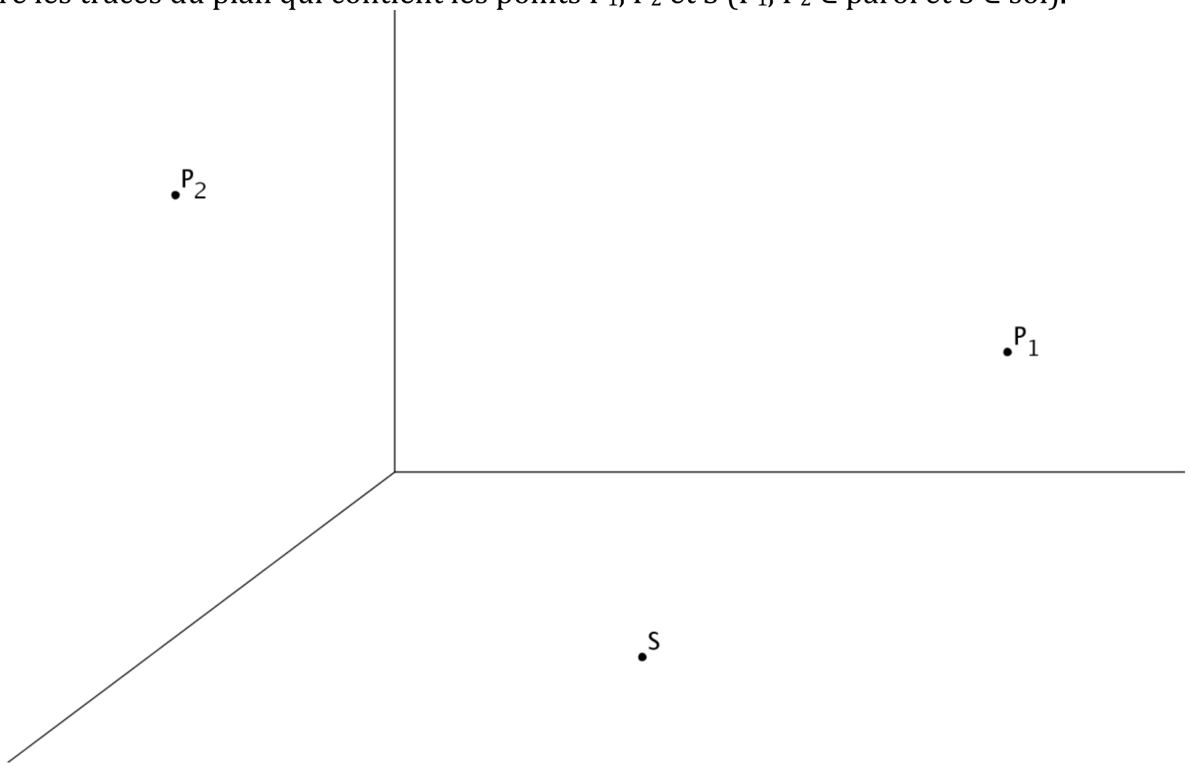


Construisez l'intersection de la droite avec le parallélépipède.

Dessins de plans

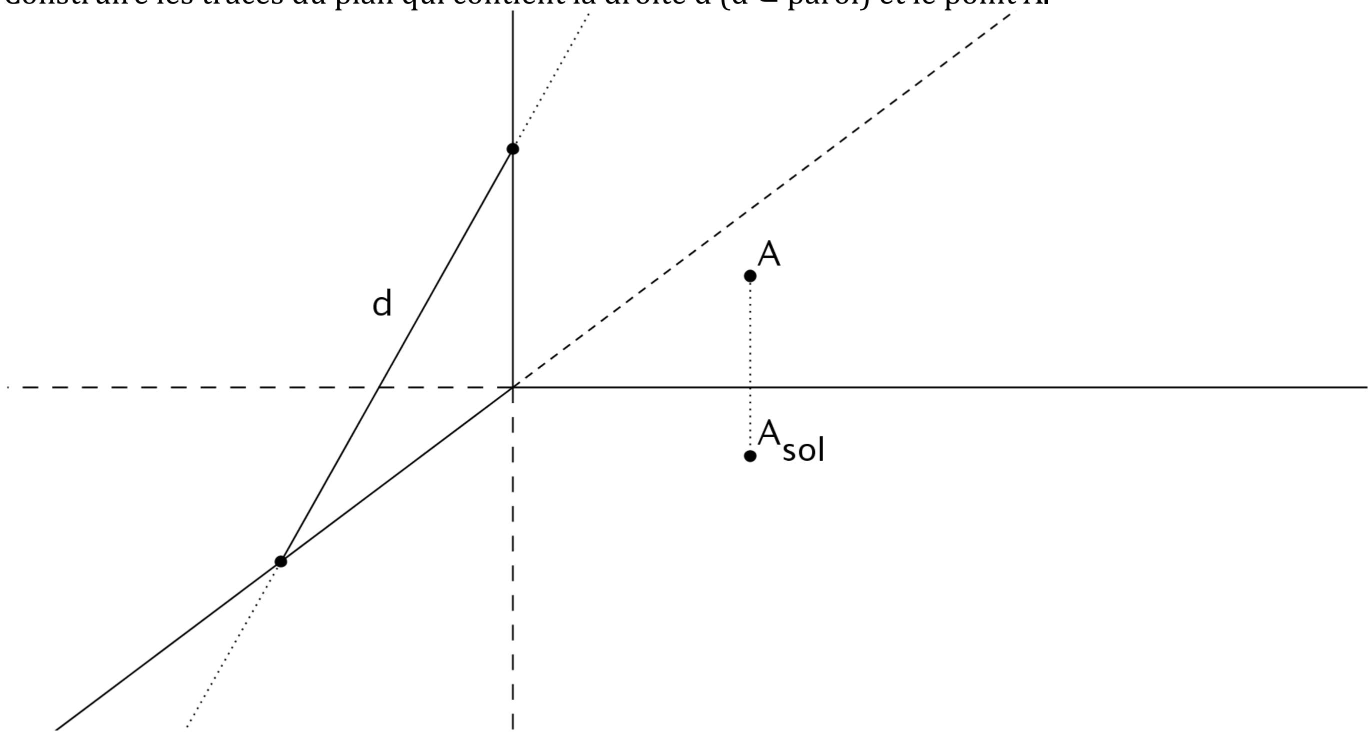
Plan 1

Construire les traces du plan qui contient les points P_1, P_2 et S (P_1, $P_2 \in$ paroi et $S \in$ sol).



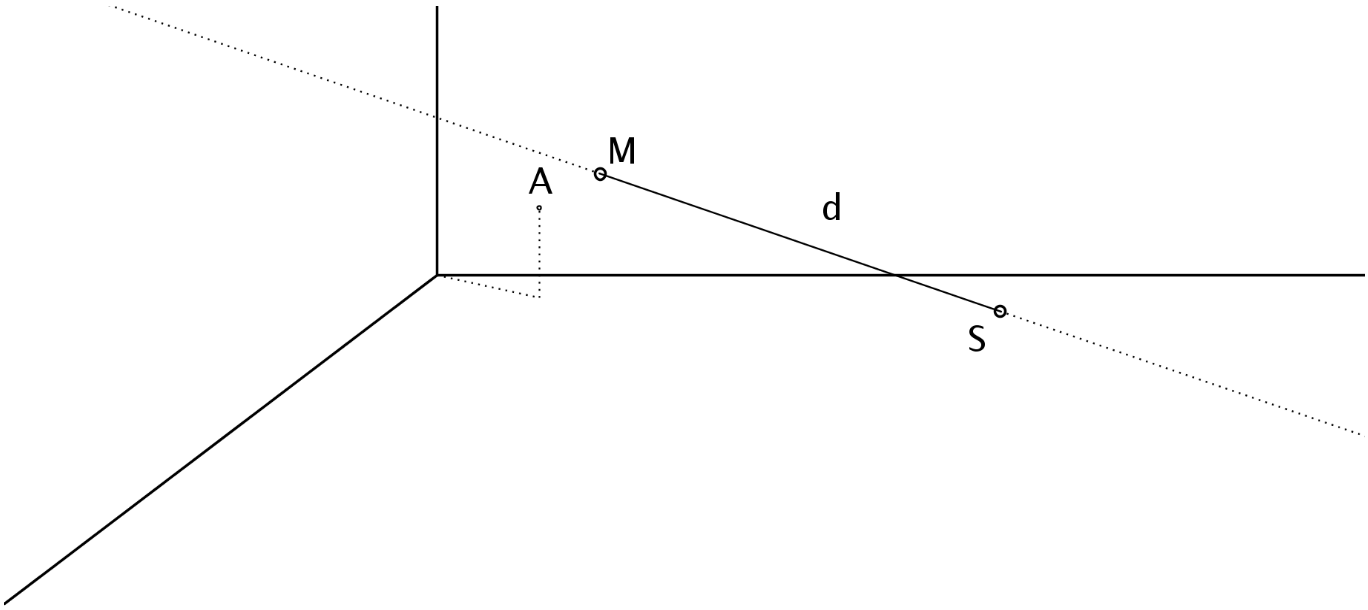
Plan 2

Construire les traces du plan qui contient la droite d ($d \subset$ paroi) et le point A.



Plan 3

Construire les traces du plan qui contient la droite d et le point A.



Plan 4

Dessiner le plan :

1. passant par les points A(2 ; 6 ; -4), B(-4 ; 0 ; -2) et C(-2 ; 2 ; 2)
2. passant par les points A(5 ; 2 ; 1), B(3 ; -1 ; 2) et C(7 ; 1 ; 1)
3. passant par le point A(3 ; 0 ; 0) et parallèle à $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Plan 5

Soient les points O(0 , 0 ; 0), A(4 ; 0 ; 0), B(0 , 4 ; 0), C(0 , 0 ; 4), ainsi que les plans suivants :

i) α passant par A et parallèle au mur,

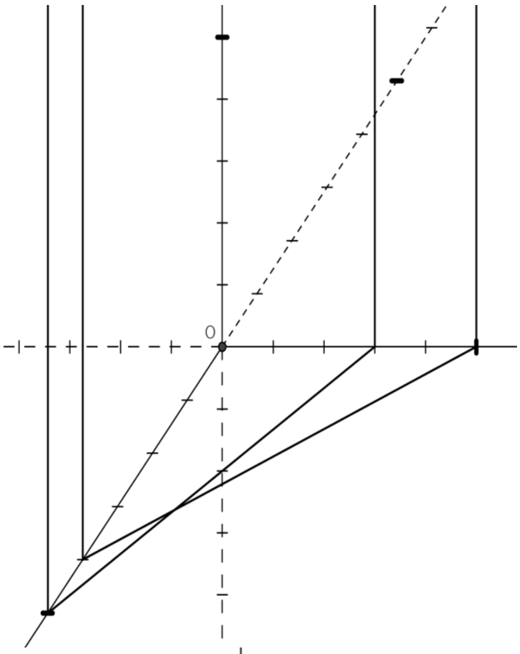
ii) β passant par B et parallèle à la paroi,

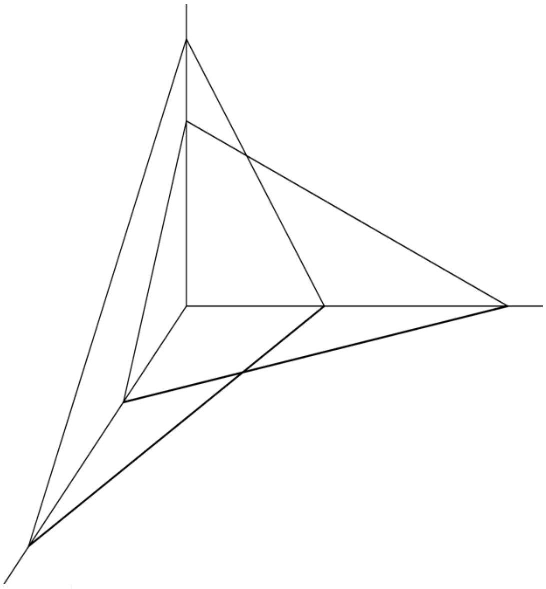
iii) γ passant par C et parallèle sol.

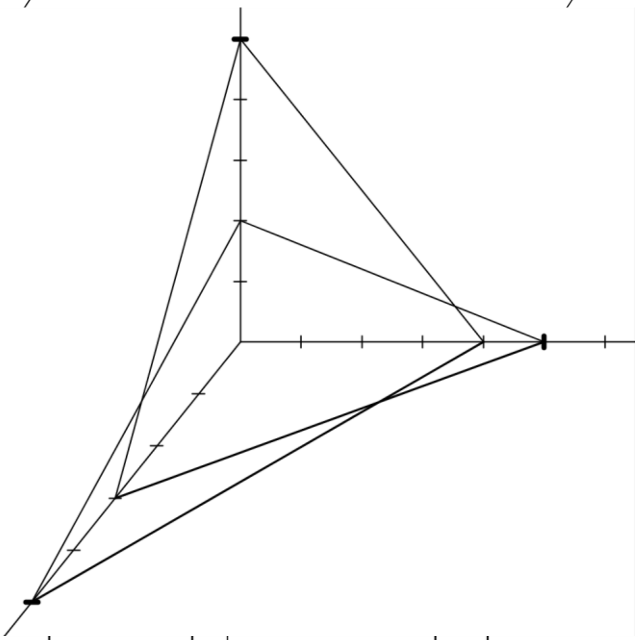
Dessiner ces trois plans ainsi que leur point d'intersection I.

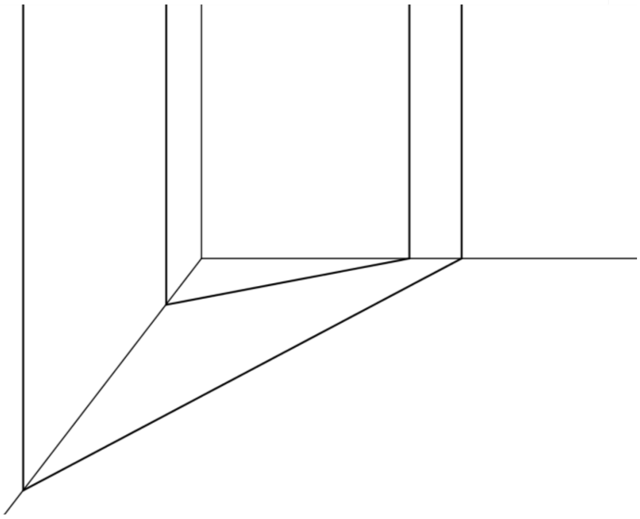
Plan 6

Dessiner l'intersection des deux plans :



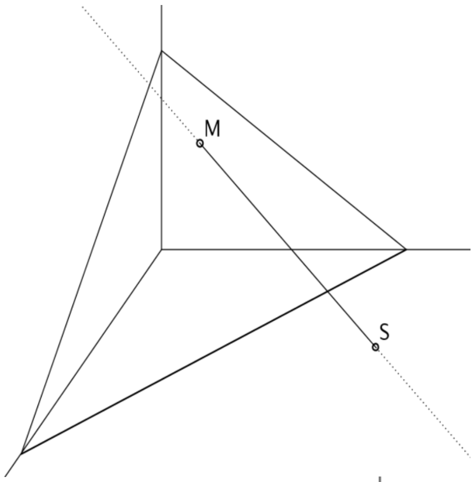


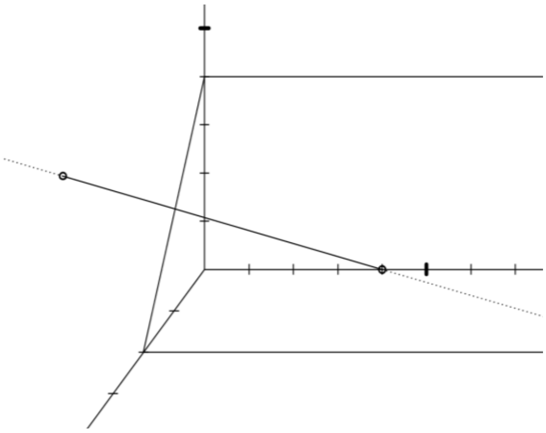


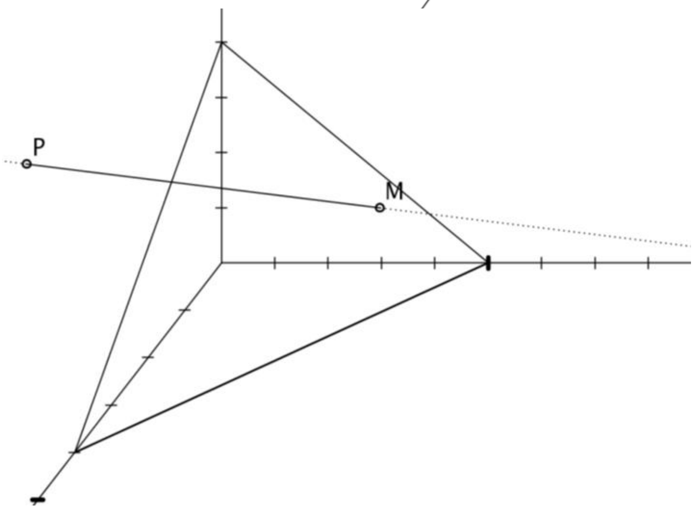


Plan 7

Dessiner l'intersection du plan et de la droite :

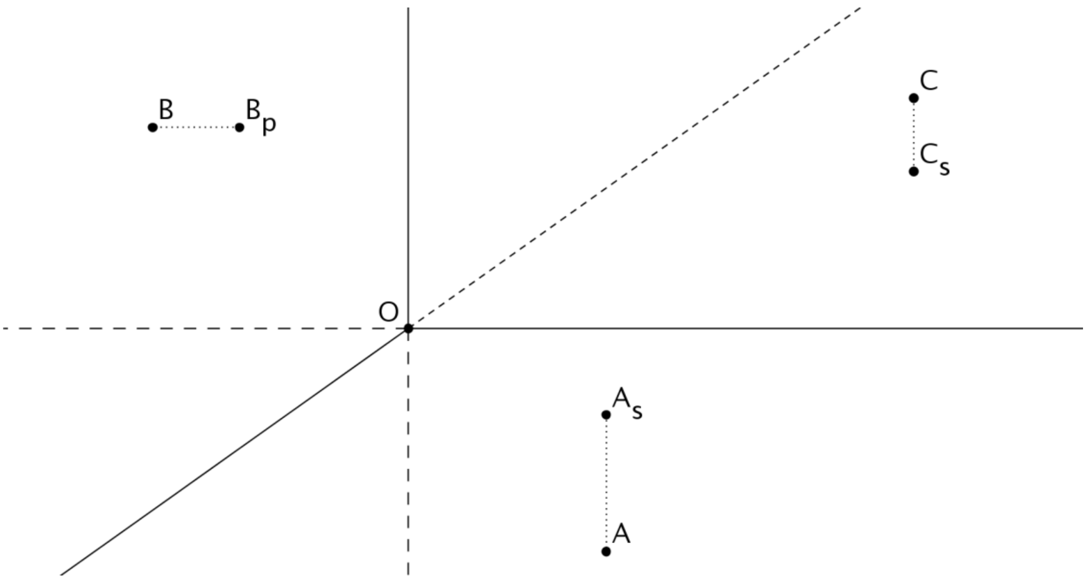






Plan 8

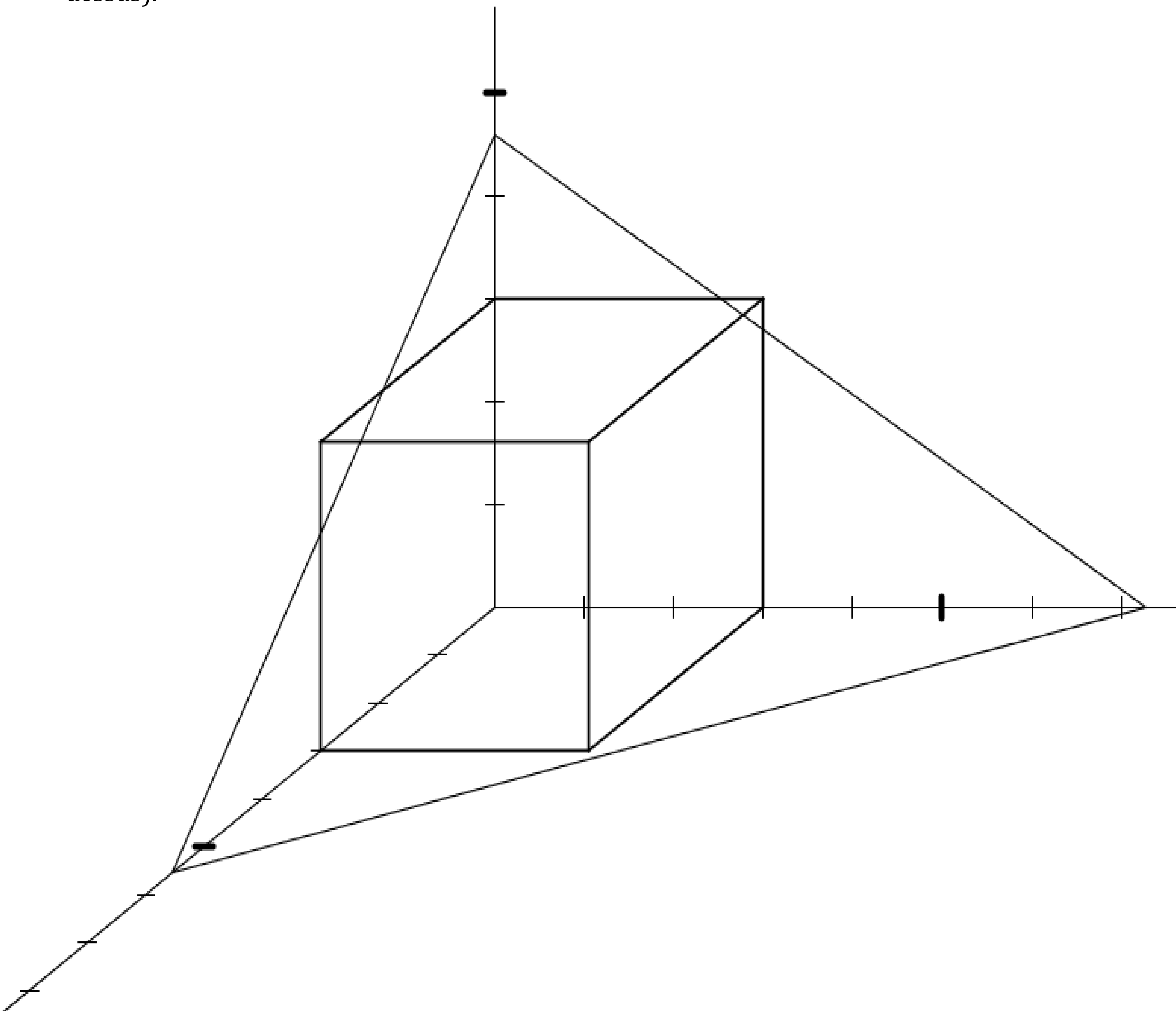
Hachurer en couleur la partie visible (dans le 1[er] octant) du triangle ABC.



Plan 9

Sur le dessin, on a représenté un cube et un plan donné par ses traces.

1. Dessiner l'intersection entre le plan et les trois faces visibles du cube.
2. Épaissir les parties des arêtes du cube qui se trouve du même côté du plan que vous (au-dessus).



Équations

Équation 1

Donner l'équation paramétrique vectorielle de la droite d qui passe par les points A(1 ; 5 ; 3) et B(5 ; 3 ; 1).

Équation 2

1) Quelle est l'équation paramétrique vectorielle de la droite d qui passe par A(1 ; 5 ; 3) et qui est parallèle à la droite :d' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$?

2) Construire ces 2 droites.

Équation 3

Soit la droite d'équation d : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

1) Calculer les traces de cette droite, puis dessiner la droite d dans un repère.

2) Les points P(-1 ; 5 ; 1) et Q(7 ; -3 ; 8) appartiennent-ils à la droite d ?

3) Déterminer le point de la droite d dont la cote est égale au triple de l'ordonnée.

4) Déterminer les équations des projections de d dans le sol, le mur et la paroi, puis dessiner ces projections.

Équation 4

Donner les équations paramétriques, les traces et une représentation graphique des droites suivantes :

1) d passe par A(6 ; 2 ; 1) et B(2 ; 4 ; 3).

2) d passe par A(5 ; 7 ; 2) et B(2 ; 2 ; 2).

Équation 5

Par calcul, décider si les quatre points suivants appartiennent à un même plan : A (2 ; 5 ; 3), B(-1 ; 6 ; 5), C(0 ; 0 ; 10) et D(5 ; 0 ; 5).

Équation 6

Le plan π est donné par trois points : A (2 ; -1 ; 4), B (-2 ; 1 ; 2) et C (5 ; - 4 ; 6).
Donner l'équation vectorielle paramétrique de π, ainsi que son équation cartésienne.

Équation 7

Dans un repère à trois dimensions, dessiner les plans suivants :

$\alpha : 2x - 2y + z - 6 = 0$

$\beta : 2x + 3y - 2z - 6 = 0$

$\gamma : 2x + 3y - 6 = 0$

$\delta : 2x + 3y + 2z + 6 = 0$

$\varepsilon : 3y - 2z - 6 = 0$

$\phi : z - 6 = 0$

Intersections

Intersection 1

On donne deux droites **d₁ :** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et **d₂ :** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Vérifier qu'elles se coupent.

2) Construire les droites, ainsi que le plan qui les contient toutes les deux.

Intersection 2

Déterminer, s'il existe, le point d'intersection entre les droites a et b, puis dessiner ces droites.

1) a passe par A(3 ; 2 ; 1) et A'(4 ; 4 ; -2) b passe par B(-1 ; 0 ; 2) et B'(3 ; -6 ; 0)

2) a : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 5 - 4\mu \\ z = -2 - 15\mu \end{cases}$

3) a : $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$

4) a : $\begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 6 - 2\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = \mu \end{cases}$

Intersection 3

Les intersections d'un plan avec les axes sont respectivement

$\pi \cap Ox = (4 ; 0 ; 0)$, $\pi \cap Oy = (0 ; 6 ; 0)$ et $\pi \cap Oz = (0 ; 0; 8)$

Déterminer l'équation cartésienne du plan ainsi défini.

Intersection 4

Étudier les positions relatives du plan et de la droite suivante :

Le plan π passe par le point A(0 ; 0 ; 6), B(2 ; 0 ; 4) et C(0 ; 1 ; 5).

La droite d passe par le point D(1 ; 4 ; 1) et est parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Intersection 5

Que dire de l'intersection des plans suivants :

1) $\alpha : x - 2y + 3z - 6 = 0$ et $\beta : x + 3y - 2z + 5 = 0$

2) $\alpha : x - 2y + 3z - 6 = 0$ et $\beta : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

3) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\beta : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda + 5\mu \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -3\mu \end{cases}$

4) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ et $\beta : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 5\mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$