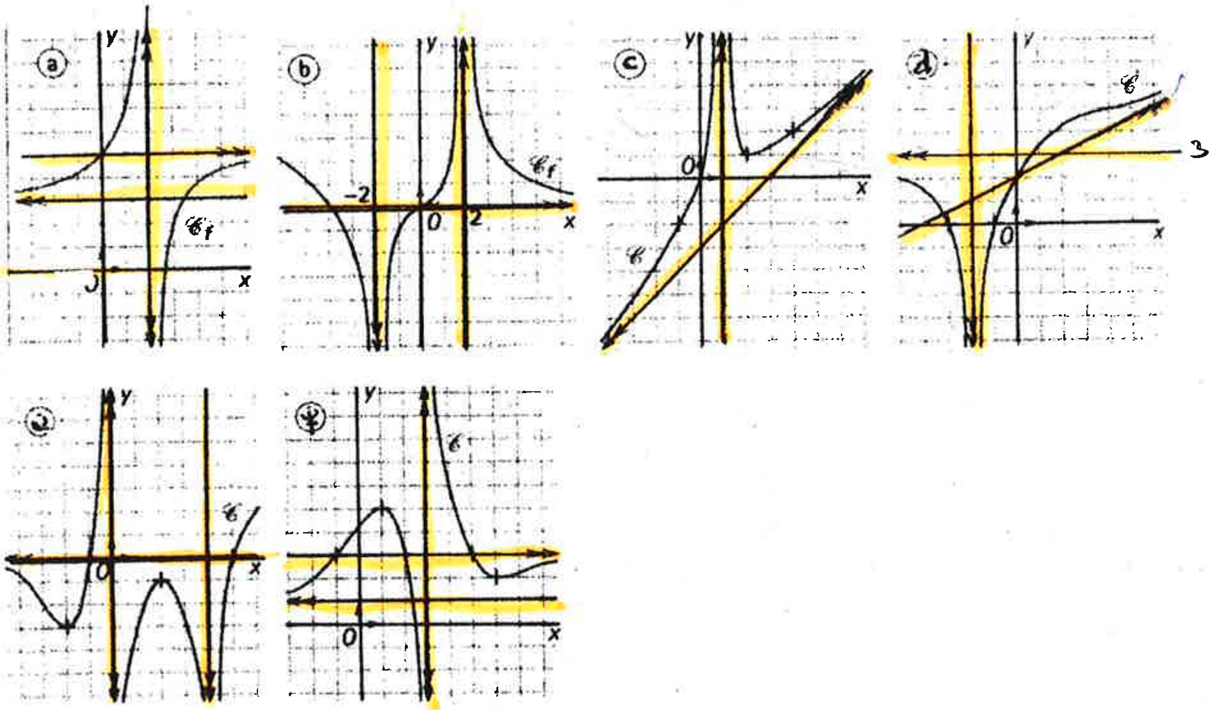
Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, connue par son graphe, indiquer son ensemble de définition. Lire (s'il y a lieu) les limites en $+\infty$ et $-\infty$, et aux valeurs exclues de l'ensemble de définition. Donner les équations des asymptotes.



Exercice 2

Voici le tableau de variation de huit fonctions :

a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_1		↗	‖	↗	

c)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_2		↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	

e)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f_5		↗		▨		↗	

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f_6		↗	1	↘	-1	↗	

b)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f_3		↘	1	↗	2	↘	

d)

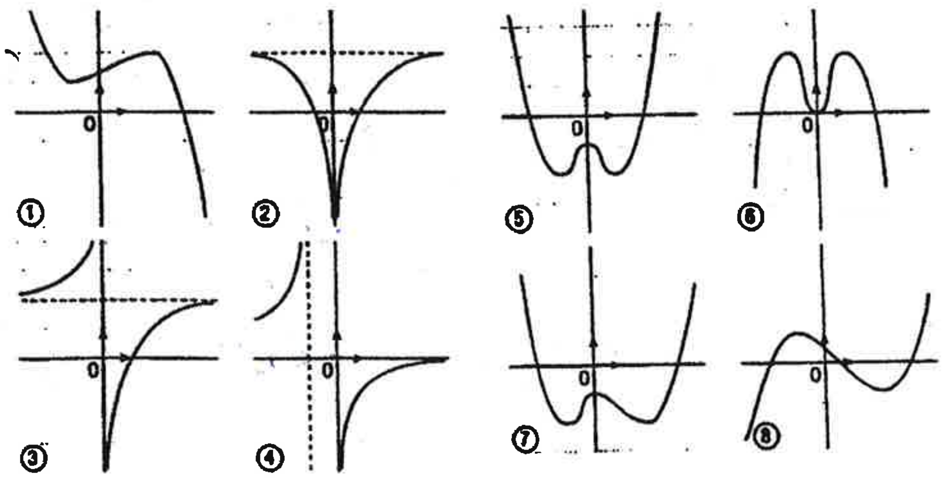
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_4		↘	‖	↗	

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
f_7		↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	

h)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_8		↗	2	↘	0	↗	2	↘	

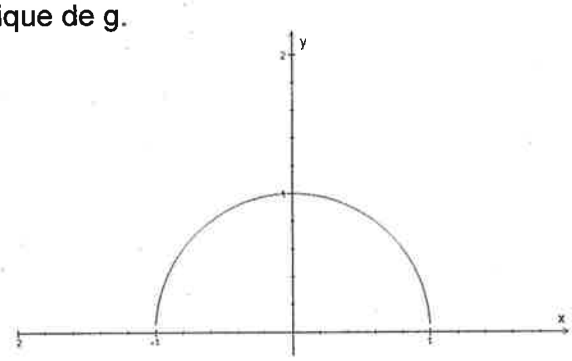
Et voici leur représentation graphique dans le désordre ! Associer à chaque fonction la courbe correspondante.



Exercice 3

Soit la fonction $g : x \mapsto y = \sqrt{1-x^2}$.

1) Chercher le domaine d'existence et l'ensemble des valeurs de cette fonction.
2) Calculer le taux de variation de g sur les intervalles [0 ;0.1] , [0 ;0.05] , [0 ;0.001] puis prévoir la valeur vers laquelle tendent ces taux et vérifier la cohérence sur la représentation graphique de g.



3) Sans calculer, donner le signe du taux de variation lorsque l'on travaille sur les intervalles : [0.5 ;0.77] , [-0.145 ;0] , [-1 ;-0.8371] , [-0.25 ;0.55] , [-0.175 ;0.175].
4) Sans calculer, que devient le taux de variation sur [-1 ;-1+Δx] lorsque $\Delta x \to 0$?

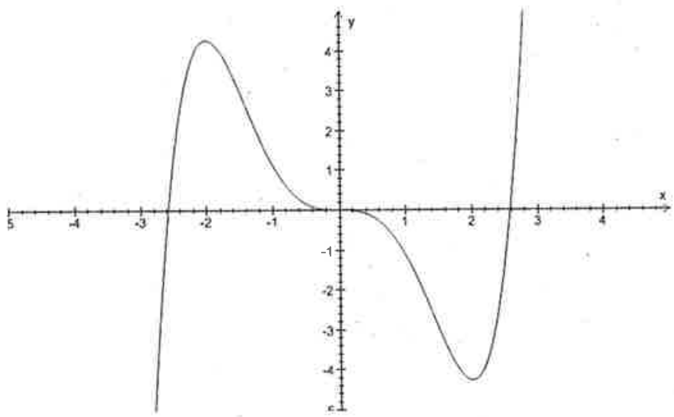
Exercice 4

Soit la fonction $x \mapsto y = -x^2 + x$.

1) Représenter graphiquement la fonction avec une unité de 10 carrés.
2) Calculer en fonction de Δx, le taux de variation sur chacun des intervalles suivants : [0 ; Δx] , [1 ;1+Δx] , [0.5 ;0.5+Δx].
3) Lorsque $\Delta x \to 0$ vers quelles limites s'approchent ces taux ? Vérifier la cohérence de vos réponses sur le graphe en 1).

Exercice 5

Soit la fonction $x \mapsto y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ représentée ci-après.



1) Pour quelles valeurs de x a-t-on des points avec une droite tangente de pente positive ?
2) Pour quelles valeurs de x a-t-on des points avec une droite tangente de pente négative ?
3) Pour quelles valeurs de x a-t-on des points avec une droite tangente horizontale ?
4) De façon générale, quel lien y a-t-il entre le signe de la pente de la droite tangente et la croissance d'une fonction ?

Exercice 6

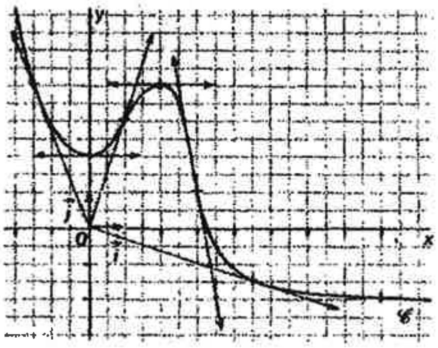
Dessiner le graphe des fonctions ci-dessous puis estimer $f'(x_0)$, la valeur de la dérivée en x_0 :

1) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ pour $x_0 = 1$ $x_0 = -1$ $x_0 = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x_0 = 1$ $x_0 = \frac{1}{4}$ $x_0 = 5$

Exercice 7

La fonction f est représentée par la courbe ci-contre. Donner l'équation de chacune des tangentes.



Exercice 8

A l'aide de la définition de la dérivée, calculer :

1) $f'(3)$ pour $f(x) = 2x + 1$

2) $f'(5)$ pour $f(x) = 3x^2$

3) $f'(x_0)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$

4) $f'(x_0)$ pour $f(x) = ax + b$

5) $f'(x_0)$ pour $f(x) = ax^2$

6) $f'(x_0)$ pour $f(x) = ax^3$

Exercice 9

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{10}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{7}{x^4}$

d) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}$

g) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 34$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x} + (x^3 + 3)^2$

i) $f(x) = \frac{6}{x^3} - 5x^2 + 8$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^4}$

k) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2x^5$

l) $f(x) = \frac{-5}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

m) $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^3}}$

n) $f(x) = (x^2 - 5x)^2$

o) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$

Exercice 10

1) Faire le graphe de la fonction $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$.
2) Calculer la dérivée de la fonction.
3) Calculer les coordonnées du point du graphe dont la tangente est horizontale.
4) Donner l'équation de la tangente au graphe de f, au point d'abscisse x = 4.
5) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x = 1.

Exercice 11

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x}$.

1) Calculer les coordonnées du graphe à tangente horizontale.
2) S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?
3) Donner l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse 1.

Exercice 12

Trouver les points à tangente horizontale et faire le tableau des variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 12x$
2) $f(x) = x^3 + 4x$
3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$
4) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 3$

Exercice 13

Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ n'admet-il aucun point à tangente horizontale ?

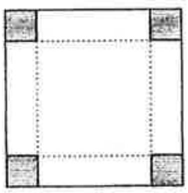
Exercice 14

Pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de $f(x) = mx^3 + 2x^2 + x - 2$ admet-il :

a) un point à tangente horizontale ?
b) deux points à tangente horizontale ?
c) aucun point à tangente horizontale ?

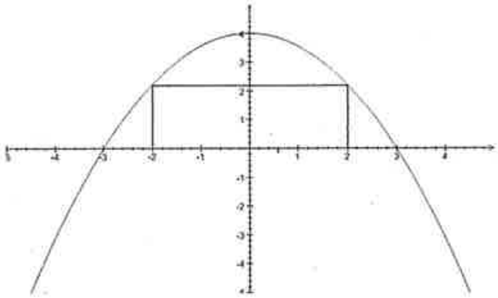
Exercice 15

Trouver les dimensions de la plus grosse boîte (sans couvercle) que l'on peut fabriquer à partir d'une feuille carrée de métal de 144 cm^2, en découpant des carrés égaux aux coins et en redressant les côtés.



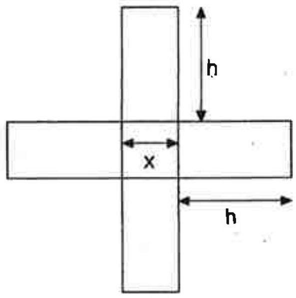
Exercice 16

a) Donner l'équation de la parabole ci-dessous.
b) Sachant que le rectangle a une aire maximale, calculer ses dimensions.



Exercice 17

Une boîte en carton, sans couvercle, a le patron ci-contre.
Sa base carrée a pour côté **x** et sa hauteur est **h** (en cm).
On suppose que la boîte a un volume de 500 cm^3.
Calculer la longueur du côté x de la base pour que l'aire du patron soit minimale.



Exercice 18

On envisage la construction d'un solide en forme de parallélépipède rectangle, de longueur double de la largeur et de volume égal à 36 dm^3. Calculer ses dimensions afin que la quantité de peinture utilisée pour le recouvrir soit minimale.

Exercice 19

Dériver les fonctions suivantes :

a) $y = \dfrac{-3x+4}{2x+3}$

b) $y = (x-3)(x^2+2)$

c) $y = \dfrac{x^2-9}{x-5}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

e) $y = \sqrt{x^3-3x}$

f) $y = \dfrac{(x+3)^3}{2x^2-10x}$

g) $y = -\dfrac{1}{3}(4x^3+30x)^6$

h) $y = \dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-8x+6}$

i) $y = (x+1)^2(2-x)^3$

j) $y = (x^2+3x-4)^4$

k) $y = x \cdot \sqrt{x^2-8x+5}$

l) $y = \dfrac{(2x+5)^2}{3x^2-4}$

m) $y = (x^2-2)^3 \cdot (x+3)^2$

Exercice 20

Dans un cercle de rayon 5, on inscrit un rectangle de longueur **x** et de hauteur **h**.

a) Exprimer h en fonction de x et de r.
b) Calculer les dimensions du rectangle sachant que son aire est maximale.

Exercice 21

Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = x^2 - 1$ qui sont le plus près de l'origine.

Exercice 22

Soit la fonction f : $y = 0{,}25x^2 + 2x + 5$.
En quel point la tangente au graphe est-elle parallèle à la droite $y = -x - 7$?
Donner l'équation de la tangente et représenter graphiquement la situation.

Exercice 23

Soit la fonction f : $y = \dfrac{3}{2x+4}$.
En quel point la tangente au graphe est-elle parallèle à la droite $3x + 2y = 0$?

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+2} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+1}{x-3} =$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{2x+1}{x-3} =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(3x-1)^2}{(x+1)^2} =$

$\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4x) =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x^2-1} =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+5} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} =$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^2+3x) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{-1}{x^3}\right) =$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{-2}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5}{-x} =$

$\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{n+1}{n-1} =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^3} =$

$\lim\limits_{x\to 2} (x^3+x^2+x+3) =$

$\lim\limits_{x\to -1} (x^3+x)(x^2-2) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x =$

Exercice 25

A l'aide des règles établies (A, B, C, D et E) ou par un calcul approché, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2-3x-3} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x-7}\right) =$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} =$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{x+2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{4x^2+3x} =$$

$$\lim_{x\to0} \frac{3x+2}{x} =$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x^3-5x^2+6x}{2x^2-6x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\cdot 2^{-x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-5x^2}{x^2+5} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7}{-x^2+5x-6} =$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4} =$$

Exercice 26

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, les zéros et les asymptotes :

1) $y=\dfrac{4x-3}{x^2-1}$

2) $y=\dfrac{4x+2}{2-3x}$

3) $y=\dfrac{4x^2+5}{x-2}$

4) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

5) $y=\dfrac{4x-3x^2}{(2x+9)^2}$

6) $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

7) $y=\dfrac{2x^2+x-1}{3x+6}$

8) $y=\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$

Exercice 27

Proposer une fonction dont on donne les asymptotes suivantes :

1) $x=1$ et $x=4$; la fonction s'annule en $x=2$.
2) $x=3$ et $y=-2$; le graphe passe par (5 ;-4).
3) $y=2x$ et $x=3$.
4) $y=-x+5$ et $x=2$; la fonction s'annule en $x=-1$.
5) $x=-2$ et $y=\dfrac{3}{4}$; la dérivée en 0 vaut 5.

Exercice 28

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

- Domaine de définition
- Parité
- Intersection avec les axes
- Asymptotes et comportement asymptotique
- Tableau des signes
- Première dérivée ⇒ Tableau de variation et extrema
- Représentation graphique

$f_1 : y = \dfrac{2x-5}{x^2-3x-4}$ $\qquad f_2 : y = \dfrac{x^2-16}{x}$ $\qquad f_3 : y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

$f_4 : y = \dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$ $\qquad f_5 : y = \dfrac{\left(x^2-9\right)^2}{\left(x-4\right)^4}$ $\qquad f_6 : y = \dfrac{\left(x+3\right)^3}{2x^2-10x}$

$f_7 : y = \dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-x}$ $\qquad f_8 : y = \dfrac{(2x+1)^2}{\left(x-5\right)^3}$

Exercice 29

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{-5x+4}$

2) $f(x) = \sqrt{3x^2+5x-2}$

3) $f(x) = \sqrt{3x^3-5x^2-42x-40}$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-3x+2}{x^2-5x+6}}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{2x^3+7x^2+2x-3}}$

Exercice 30

Etudier les fonctions suivantes (domaine, intersections avec les axes, dérivée, tableau des signes et de variation, graphe) :

$f : y = \sqrt{25 - x^2}$

$g : y = \sqrt{6 - 2x}$

$h : y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

$i : y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

Exercice 31

Etudier la croissance et la courbure des fonctions suivantes :

$f : y = 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18$

$g : y = 5x^3 - 2$

$h : y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

$i : y = x^4 - 16$