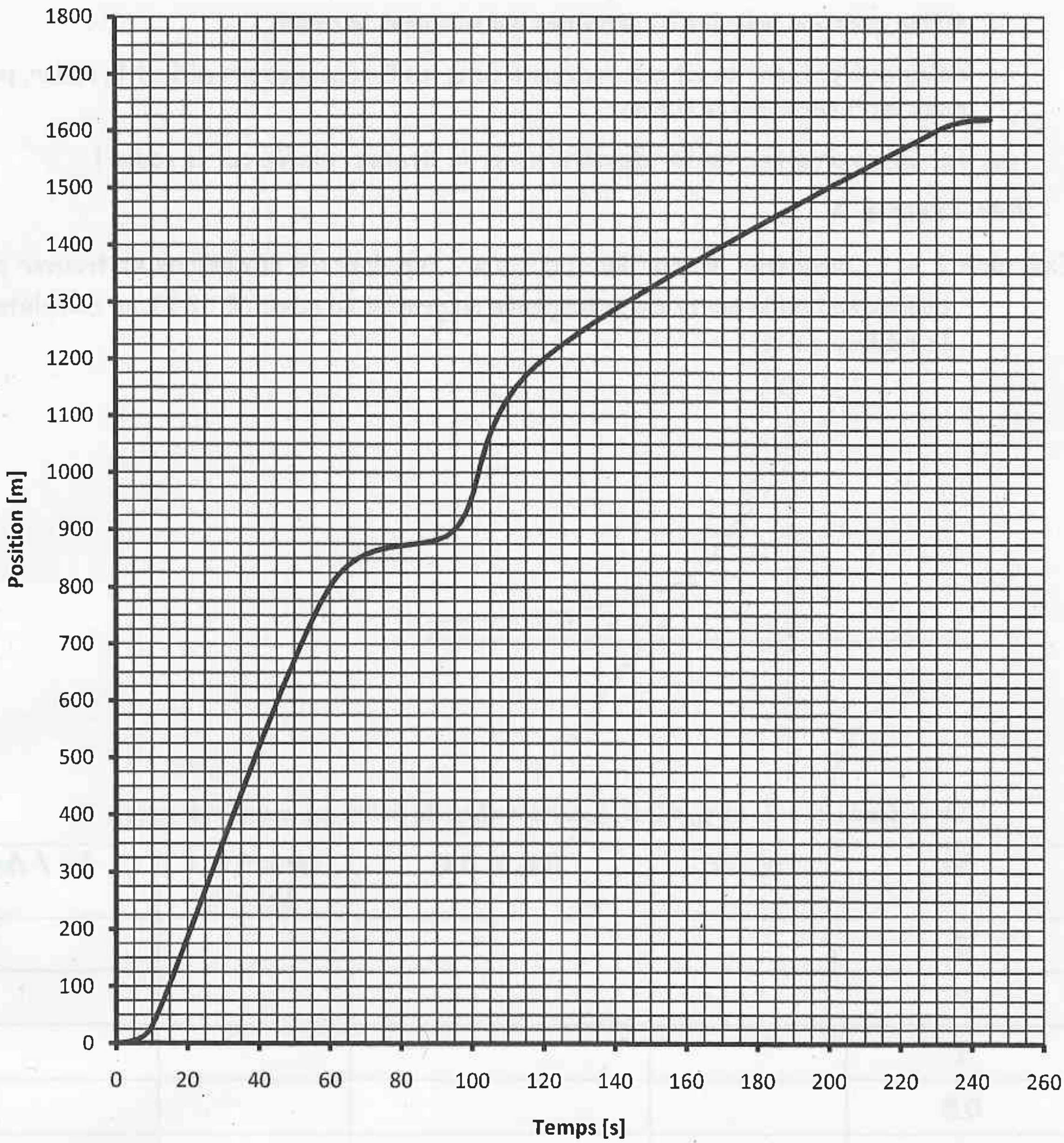
Chapitre 2 – Etude de Fonctions – Dérivées

Calcul de dérivées

Exercice 1 : Bryan va en scooter du Lycée Jean-Piaget jusqu'à la Place Pury. Ce trajet fait 1.6 kilomètres et lui prend environ 4 minutes.

La circulation est fluide et il a la chance de n'être ralenti qu'une seule fois par un feu rouge !

Voici un relevé graphique du compteur kilométrique de son scooter (exprimé en mètres) :



Répondre aussi précisément que possible aux questions suivantes :

(i) Combien de mètres a-t-il parcouru au cours de la première minute de son trajet et quelle était sa vitesse moyenne durant cette première minute (en m/s … puis en km/h !) ?

(ii) Mêmes questions pour la deuxième, la troisième et la quatrième minute.

(iii) Après 975 mètres de route, Bryan a eu la surprise de croiser un radar. Depuis combien de temps roulait-il ?

(iv) Combien de mètres a-t-il parcourut dans les 10 secondes qui précédaient le radar et quelle était sa vitesse moyenne sur ces 10 secondes ?

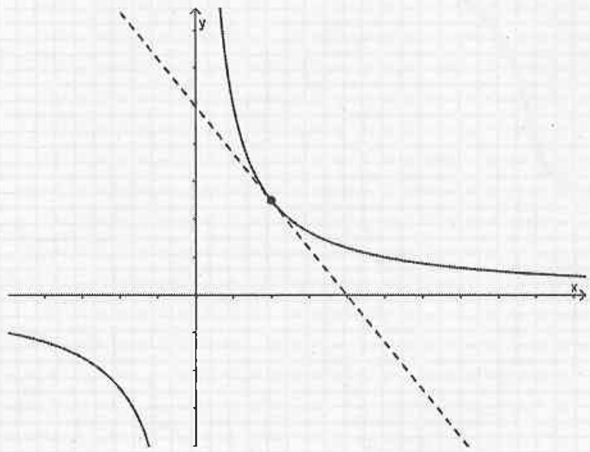
(v) Même question pour les 10 secondes qui suivaient le radar.

(vi) Calculer à présent sa vitesse moyenne dans les 5 secondes précédant le radar, puis dans les 5 secondes le suivant.

(vii) Par approximation, tenter de déterminer la vitesse relevée par le radar !

Voir Théorie A

Exercice 2 : Considérer la fonction $f(x) = y = \frac{5}{x}$ représentée ci-dessous et trouver par approximation la pente de la tangente au graphe au point (2 ; 2.5), en complétant le tableau qui suit.



On a donc $x_0 = 2$ et $y_0 = 2.5$ (coordonnées du point qui nous intéresse).

Δx	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$	$\Delta y / \Delta x$
3				
2				
1				
0.5				
0.1				
0.01				
0.001				

Voir Théorie B

Exercice 3 : Reprendre la fonction f de l'exercice 2 et calculer l'expression suivante :

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

(i) En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

(ii) Et, plus généralement, de la limite :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(iii) Calculer $f'(2)$ puis donner l'équation de la tangente au graphe de f en x = 2.

Exercice 4 : Par la méthode des 5 étapes , montrer :

1) $f(x) = c$ (fonction constante) $\Rightarrow f'(x) = 0$
2) $f(x) = mx + h$ (polynôme du 1er degré) $\Rightarrow f'(x) = m$
3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (polynôme du 2ème degré) $\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

Exercice 5 : Considérer la fonction $f(x) = y = x^2 + 6x - 3$ dont la dérivée est $f'(x) = y' = 2x + 6$

(i) Trouver l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$.

(ii) Donner l'équation d'une tangente au graphe de f qui a une pente de 10.

(iii) Chercher une tangente horizontale au graphe de f. Quelle est sa pente ? Et son équation ?

Exercice 6 : **Exo Sup** : Soit la fonction $f(x) = y = 3x^2 + 2x - 4$ dont la dérivée est $f'(x) = y' = 6x + 2$.

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$.
2. Donner l'équation d'une tangente au graphe de f qui a une pente de -4.
3. Chercher une tangente horizontale au graphe de f. Quelle est sa pente ? Et son équation ?

Voir Théorie C

Exercice 7 : Voici une liste de fonctions : retrouver leurs dérivées respectives !

$y = 2x$	$y' = 2$
$y = 2x^2$	$y' = 2x$
$y = x^2$	$y' = -2$
$y = -2$	$y' = 1$
$y = x + 2$	$y' = 0$
$y = 2x - 2$	$y = 4x$

Exercice 8 : Considérer les fonctions

$$u(x) = x^{17} \qquad \text{et} \qquad v(x) = 2x - 1$$

dont les dérivées respectives sont

$$u'(x) = 17x^{16} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2$$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f_1(x) = u(x) + v(x)$

(b) $f_2(x) = u(x) - v(x)$

(c) $f_3(x) = u(x) \cdot v(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Exercice 9 : Établir les fonctions dérivées de :

$f(x) = 7x^2$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{2}{3}x + \sqrt{5}$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt{x}$

$l(x) = x^3$ $\qquad$ $k(x) = \frac{1}{x+2}$ $\qquad$ $p(x) = \frac{x}{x+1}$

$q(x) = 10$ $\qquad$ $t(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercice 10 : À l'aide des règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 7$ (b) $y = \sqrt{x}$ (c) $y = (x+1)\sqrt{x}$

(d) $y = \frac{1-x}{2x+3}$ (e) $y = \pi x^2 + 2\pi hx$ (f) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(g) $y = -\frac{k}{x}$ (h) $y = (2x-1)^3$ (i) $y = \frac{x^3+2}{x^2+1}$

(j) $y = (x^3+2)(x^2+1)$ (k) $y = \sqrt[3]{x}$ (l) $y = \sqrt[4]{x^3}$

(m) $y = (x^2-7x)^5$ (n) $y = (\sqrt{x}-x)^4$ (o) $y = \sqrt{x^2-7}\left(x^3 - 2x^2 - \frac{5}{9}\right)$

(p) $y = \sin(x)$ (q) $y = \cos^2(x)$ (r) $y = \frac{\sin(x)}{x^2+3}$

Exercice 11 : **Exo Sup :** À l'aide des théorèmes de dérivation, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $y = x^3 + 4x^2 - 12$ 2) $y = \frac{x-3}{7-2x}$ 3) $y = -\frac{6}{3x}$

4) $y = \sqrt{7x}$ 5) $y = (2x-3)^2\sqrt{x}$ 6) $y = (3-x)^5$

7) $y = \frac{2x^4+2}{x^3-1}$ 8) $y = \sin(x)\cdot(x-3)^3$ 9) $y = \sqrt{\cos(x)}$

<u>Application des dérivées</u> : Voir théorie D

Exercice 12 : Établir le tableau de croissance des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 \qquad g(x) = \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1}$$

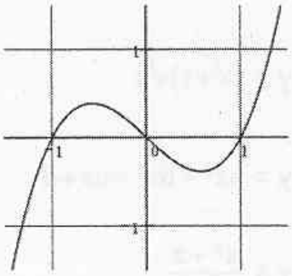
$$h(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad k(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$$

Exercice 13 : Soit la fonction

$$f: y = -x^3 + 3x^2 - 3x\,.$$

i. Trouver les points de tangence à tangente horizontale s'il y en a.
ii. Donner l'équation de la tangente.
iii. Faire le tableau de signe de f' puis le tableau de croissance de $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soient la fonction $x \mapsto y = x^3 - x$ et sa représentation graphique :



Trouver x_1 et x_2, points à tangente horizontale du graphe de la fonction $h(x) = x^3 - x$.

Exercice 15 : Prouver que

$$f(x) = \frac{2x-5}{3-4x}$$

est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Trouver les valeurs possibles pour a afin que le graphe de $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ n'admette aucun point à tangente horizontale.

Exercice 17 : **Exo Sup** : Établir le tableau de croissance des fonctions suivantes :

$$g(x) = 3x^3 - 6x \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$k(x) = \frac{7}{x^2 - 9}$$

Exercice 18 : Déterminer les abscisses des extremums de $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - x + 18}$

Voir théorie E

Exercice 19 : Faire le tableau de signes, le tableau de croissance et le tableau de courbure des fonctions :

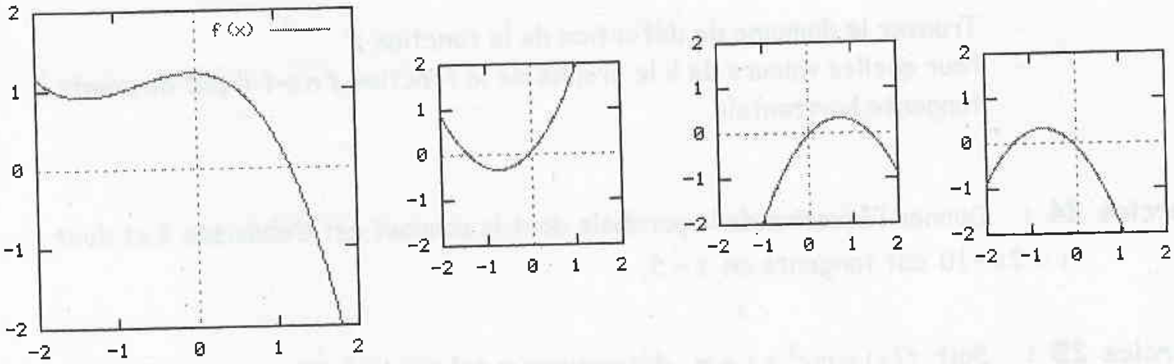
a) $y = x^3$ b) $y = \frac{1}{3}x - 5$

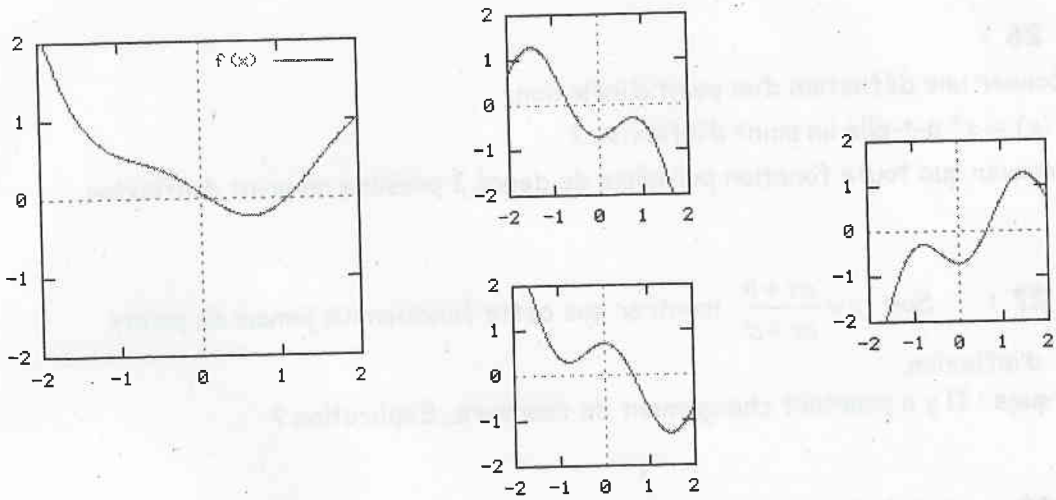
c) $y = -x^2 + 1$ d) $y = \dfrac{2}{-3x}$

e) $y = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ f) $y = x^6 - 3x^4$

g) $y = x^3 + 4$ h) $y = \dfrac{x+3}{x-4}$

Exercice 20 : À l'aide du graphe de f(x) , retrouver $f'(x)$ (justifier le choix...):





Exercice 21 : Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 15$$

a) Localiser ses points à tangente horizontale s'il y en a.

b) Déterminer l'équation de la tangente au point d'inflexion.

Exercice 22 : Soit la fonction suivante $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

a) Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point T(4 ;?)

b) Trouver l'équation des 2 tangentes de pente -3 au graphe de la fonction f.

Exercice 23 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{k}\,x^2-2x+3}{x-2}$ où k est un nombre réel.

- Trouver le domaine de définition de la fonction f
- Pour quelles valeurs de k le graphe de la fonction f n'a-t-il pas de points à tangente horizontale.

Exercice 24 : Donner l'équation de la parabole dont le sommet est d'abscisse 3 et dont $y=2x-10$ est tangente en $x=5$.

Exercice 25 : Soit $f(x)=mx^2+x+m$, déterminer m tel que la droite $y=1$ soit tangente au graphe de f.

Exercice 26 :

a) Donner une définition d'un point d'inflexion.
b) $f(x)=x^4$ a-t-elle un point d'inflexion ?
c) Prouver que toute fonction polynôme de degré 3 possède un point d'inflexion.

Exercice 27 : Soit $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, montrer que cette fonction n'a jamais de points d'inflexion.

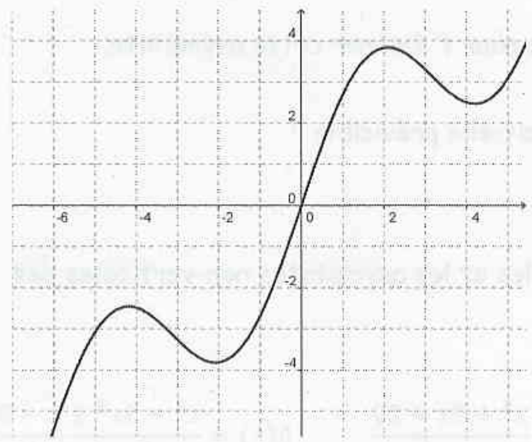
Remarques : Il y a pourtant changement de courbure...Explication ?

Exercice 28 : Soit la fonction $h(x)=\mathrm{a}x^3+\mathrm{b}x^2+\mathrm{c}$.

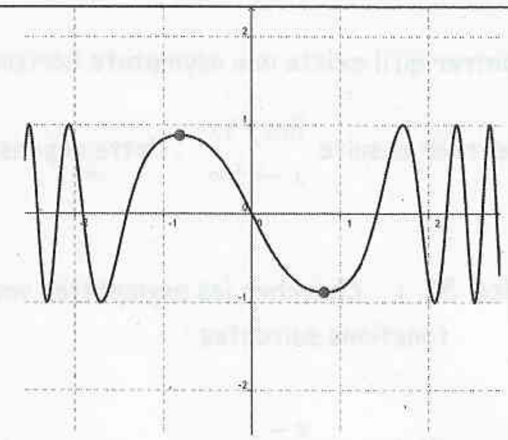
Déterminer a, b et c en sachant que :

- h a un minimum local au point P(0 ;3)
- h a un maximum local en x = -4
- la pente de la tangente au graphe de h en x = 1 vaut 1,5.

Exercice 29 : Chercher les coordonnées exactes des sommets visibles sur les graphiques suivants :

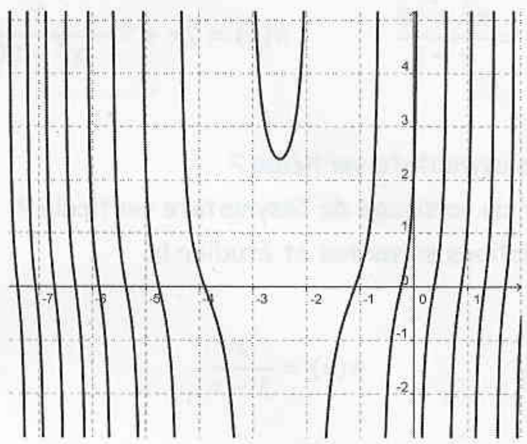


$y = 2\sin(x) + x$

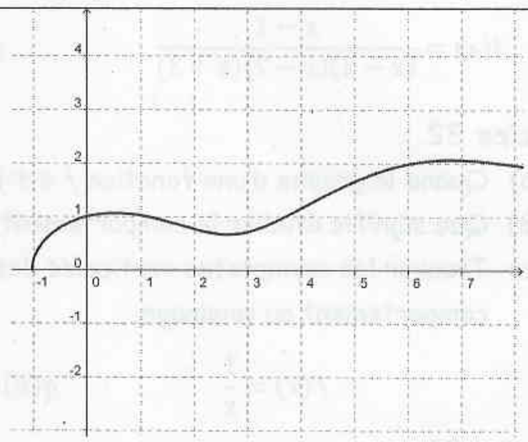


$y = \sin(x^3 - 2x)$

(uniquement les deux sommets indiqués)



$y = \tan(x^2 + 5x - 2)$



$y = \sqrt{\cos(x) + \dfrac{x}{2}}$

Indication : Utilisez la dérivée de la composition de fonction dans la théorie C.

Asymptotes et comportement asymptotique

Exercice 30 : On considère les fonctions du type $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$.

Montrer qu'il existe une asymptote horizontale pour f. Donner cette asymptote.

Chercher ensuite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)$. Cette réponse était-elle prévisible ?

Exercice 31 : Chercher les asymptotes verticales et les asymptotes non-verticales des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+9x+20} \qquad g(x) = \frac{x^2+9x+20}{x-1} \qquad h(x) = \frac{x^3-5x^2+x-9}{x^2-4x+2}$$

$$l(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-7)(x+3)} \qquad m(x) = \frac{x^2+16}{x-5} \qquad n(x) = 2x+7-\frac{1}{x^2-25}$$

Exercice 32 :

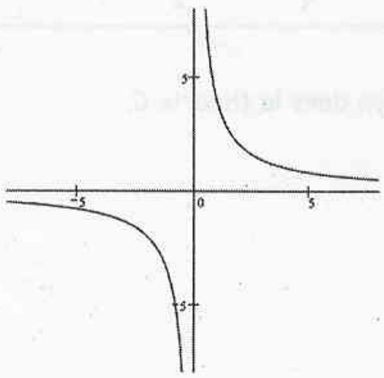
a) Quand le graphe d'une fonction f a-t-il une asymptote verticale ?

b) Que signifie étudier le comportement de f au voisinage de l'asymptote verticale ?

c) Trouver les asymptotes verticales des fonctions suivantes et étudier le comportement au voisinage.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad h(x) = \frac{x}{3-x}$$

Exercice 33 :

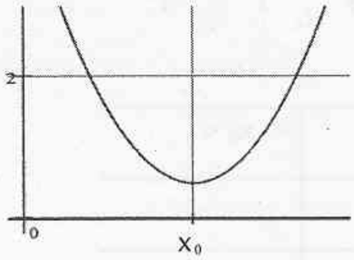


Cette hyperbole est d'équation $y = \dfrac{4}{x}$

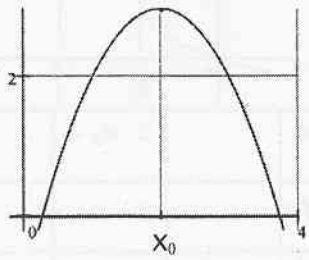
1) Trouver l'équation de la droite t, tangente à la courbe en $x = 4$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} y = ?$, $\lim\limits_{x \to \infty} y' = ?$

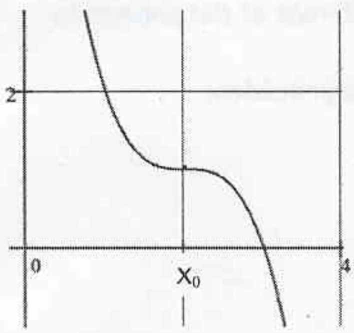
Exercice 34 : Dans chacun des cas suivants :
a) Evaluer la valeur de y' en x_0
b) Déterminer les signes de y' au voisinage de x_0
c) Indiquer la croissance de y.



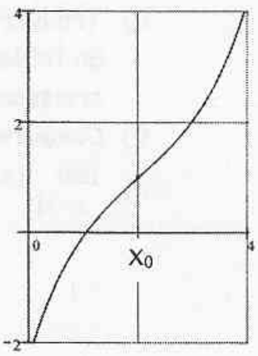
x		< x_0 <	
y			
y'			



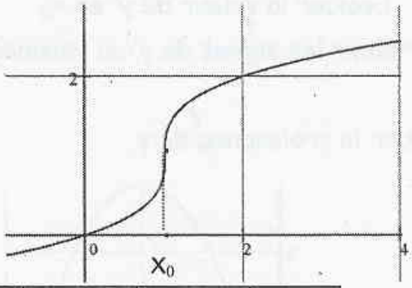
x		< x_0 <	
y			
y'			

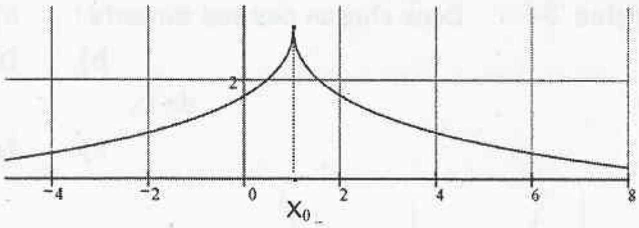


x		< x_0 <	
y			
y'			



x		< x_0 <	
y			
y'			





x		$< x_0 <$	
y			
y'			

x		$< x_0 <$	
y			
y'			

Exercice 35 : Soient les fonctions suivantes : $f(x)=(x-2)^2+0.5$

$$g(x)=-(x-2)^2+3$$

$$h(x)=-(x-2)^3+1$$

$$i(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$$

a) Trouver les points à tangente horizontale des graphes de *f*, *g* et *h* et faire un tableau des signes des fonctions, de leur dérivée et déterminer la croissance des fonctions

b) Comparer les résultats avec ceux de l'exercice précédent

c) $\lim\limits_{x \to 1} i(x) = ?$, $\lim\limits_{x \to 1} i'(x) = ?$.

Etudes complètes de fonctions

Exercice 36 : Pour les deux fonctions suivantes, effectuer ce travail :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \qquad g(x) = \frac{3x^2 + x + 4}{x^2 + 1}$$

i. Chercher les zéros de la fonction.
ii. Chercher les éventuelles asymptotes verticales.
iii. Déterminer les coordonnées des points du graphe à tangente horizontale.
iv. Calculer la pente de la tangente au graphe au point d'abscisse x=3.
v. Donner une équation de la tangente au graphe en ce même point.
vi. Faire un tableau de croissance de la fonction.
vii. Esquisser son graphe en faisant également figurer la droite du point v.

Exercice 37 : Étudier complètement la fonction

$$f: y = \frac{2x + 3}{x - 5}$$

i. Ensemble de définition
ii. Intersections avec les axes
iii. Tableau de signes
iv. Asymptotes et comportements
v. Croissance et extremums
vi. Courbure et points d'inflexion
vii. Représentation graphique

Exercice 38 : Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

Donner le domaine de définition de f.

Etablir un tableau des signes de f.

Trouver les asymptotes et étudier le comportement asymptotique de f.

Calculer l'intersection de la courbe avec les axes.

Effectuer un tableau de croissance.

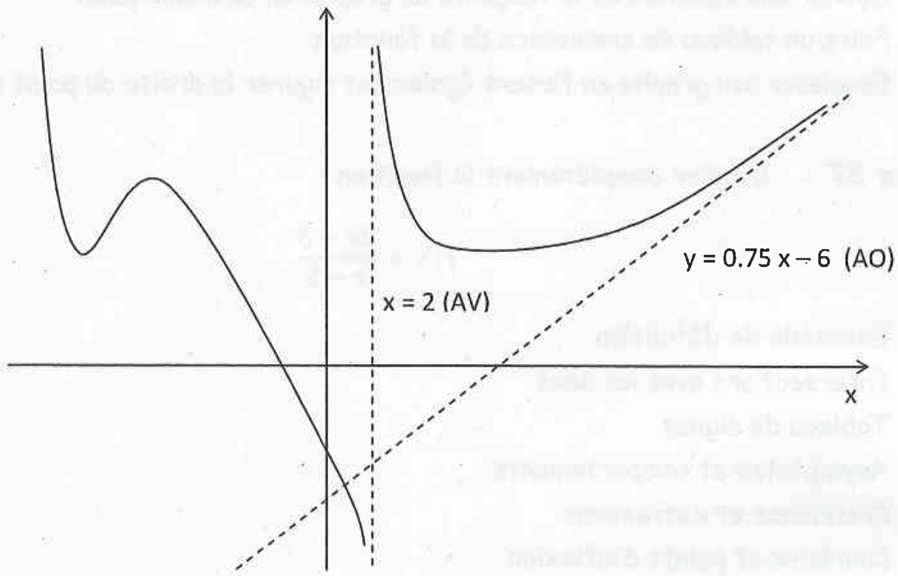
Esquisser une représentation graphique de f.

Exercice 39 : **Exo sup** : Faire de même que pour l'exercice précédent avec les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \qquad g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 2}$$

$$h(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$$

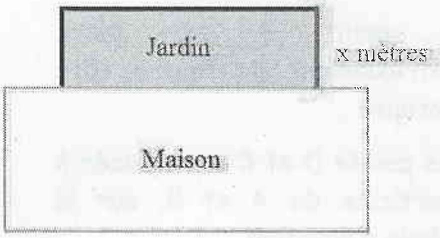
Exercice 40 : En observant le graphe d'une fonction *f*, déterminer :



1) Le domaine de définition de la fonction *f*
2) Le comportement de *f* au voisinage de l'exclu
3) Le nombre de points à tangente horizontale
4) Le nombre de points d'inflexion
5) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$
6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
7) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \frac{3}{4}x$

Problèmes

Exercice 41 : Le propriétaire d'une villa décide de créer un jardin adossé à sa maison. Pour cela, il dispose de **18 mètres** de clôtures qu'il désire utiliser complètement et de façon optimale. Il va de soi qu'il n'est pas utile de mettre une clôture le long de la maison.



a) Si le jardin s'écarte de 3 mètres de la maison ($x = 3$), quelle serait sa largeur ? Et sa surface ?

b) Et si le jardin s'écarte de 4 mètres ?

c) Et de 7 mètres ?

d) Maintenant, de façon plus mathématique… Si le jardin s'écarte de x mètres, quelle est sa largeur ? et sa surface ?

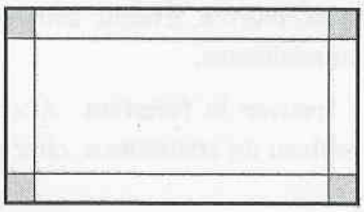
On calcule ici la surface S en fonction de l'écartement x. On obtient ainsi une fonction $S(x)$.

Le but est de faire le plus grand jardin possible… il faut donc chercher si $S(x)$ possède un maximum.

e) Chercher les points à tangente horizontale de $S(x)$ et tracer son tableau de croissance.

f) Trouver s'il existe un maximum pour $S(x)$.

Exercice 42 : Soit une boîte construite avec une feuille en carton de **20cm sur 30cm** où nous coupons quatre carrés dans les coins pour pouvoir relever les côtés.

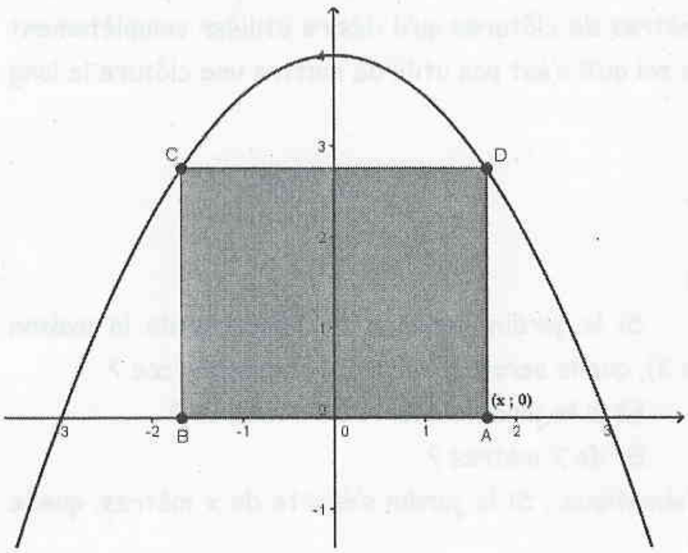


i. Si le côté du carré mesure 1cm, quel sera le volume de la boîte ?

ii. Donner le volume en fonction du côté du carré.

iii. Trouver le côté qui donne le volume maximum en étudiant la croissance de cette fonction.

Exercice 43 :



Le rectangle ci-contre est dessiné de la façon suivante :

✓ le point A est choisi librement sur l'axe Ox, entre x = 0 et x = 3 ;

✓ le point B est placé symétriquement de l'autre côté de l'origine ;

✓ les points D et C sont placés à la verticale de A et B, sur la parabole d'équation

$$y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

On cherchera à placer judicieusement le point A afin de maximiser le périmètre (ou l'aire) du rectangle ABCD.

(i) Poser x = 1,5 (on a donc le point A(1,5 ; 0)) et chercher les coordonnées de B, C et D. Calculer alors le périmètre et l'aire du rectangle ABCD.

(ii) En considérant que le point A a pour coordonnées (x ; 0), chercher les coordonnées des points B, C et D (elles dépendent bien sûr de x).

(iii) Déterminer la longueur et la largeur de ce rectangle en fonction de x, puis trouver la fonction P(x) qui exprime son périmètre. Établir son tableau de croissance et chercher d'éventuels maximums ou minimums.

(iv) Faire de même pour la surface : trouver la fonction A(x) qui exprime l'aire du rectangle et, par le biais de son tableau de croissance, chercher à la maximiser.

Exercice 44 :

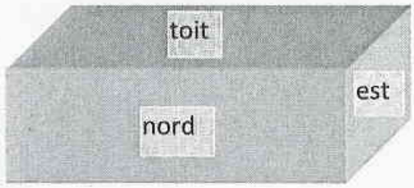
1. Déterminer deux nombres x et y positifs tels que leur somme soit égale à 11 et le produit x^3y^2 maximal.
2. Trouver les dimensions de la boîte de conserve cylindrique dont l'aire totale est minimale, le volume étant de 1000 cm^3

Exercice 45 : Jean veut construire un hangar à outils en dressant deux parois parallèles aux deux côtés de mur, et en couvrant avec un toit plat. Les deux parois font 1,8 m de haut. Le coin de mur forme un angle droit. Il n'y a pas de paroi contre le mur.

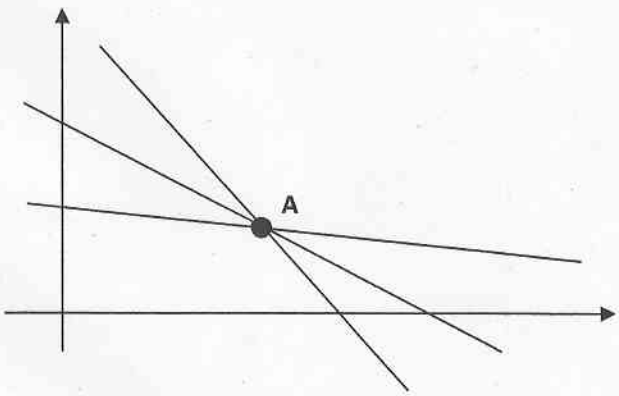
Le matériau utilisé par Jean pour la paroi "nord" est plus résistant et coûte trois fois plus cher que celui utilisé pour la paroi "est". Le prix du matériau de la paroi "est" est de 100 Fr. par mètre carré.

L'intérieur du hangar doit avoir une surface au sol de 6 m^2. Le toit plat est fait du même matériau que la paroi "nord".

Trouvez les dimensions du toit pour que le coût total du matériel utilisé (parois et toit) soit le plus petit possible.



Exercice 46 : Chaque droite passant par A(4 ; 2) coupe Ox en P et Oy en Q. En ne considérant que les droites où P et Q sont respectivement d'abscisse et d'ordonnée positives, trouvez celle qui donne une aire minimale au triangle OPQ.



Exercice 47 : **Exo sup** : On a un triangle rectangle de côtés a et b, et on veut x et y les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit dans le triangle.