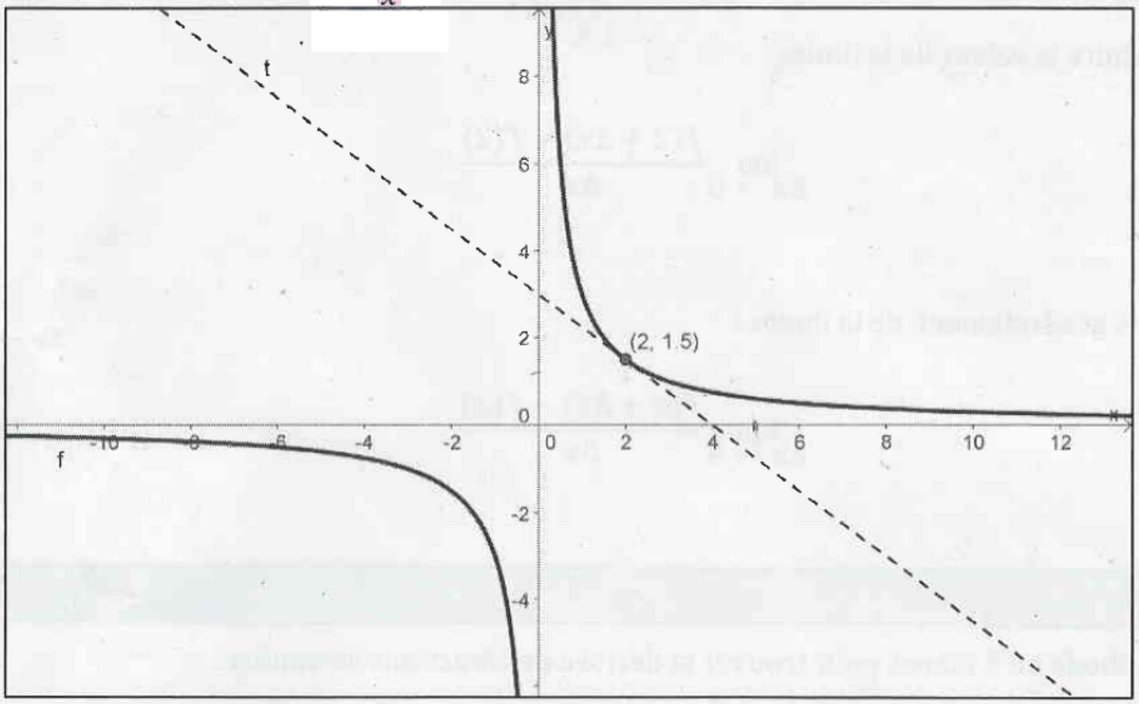
Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = y = \frac{3}{x}$ représentée ci – dessous.



Trouver par approximation la pente de la tangente t au graphe au point x_0 en complétant le tableau qui suit.

Coordonnées du point qui nous intéresse : $x_0 =$ _____ et $y_0 =$ _____ .

Δx	$f(x_0 + \Delta x)$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3			
2			
1			
0.5			
0.1			
0.01			
0.001			

On peut donc deviner que la pente de la tangente en $x_0 = 2$ vaut _____

Exercice 2

1) Reprendre la fonction f de l'exercice 1 et calculer l'expression suivante :

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

2) En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

3) Et, plus généralement, de la limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Exercice 3

Utiliser la méthode en 5 étapes pour trouver la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \qquad f(x)=\sqrt{x}$$

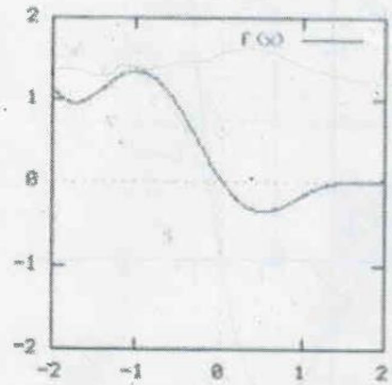
$$f(x)=\frac{1}{x+2} \qquad f(x)=\frac{x}{2x-1}$$

Exercice 4

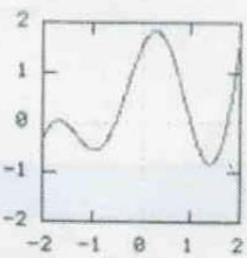
Prouver à l'aide de la méthode en 5 étapes, les formules de dérivation de la multiplication par un scalaire et de la somme de fonctions.

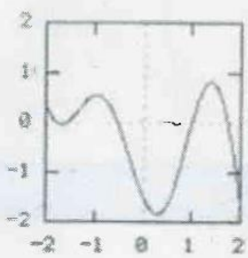
Exercice 5

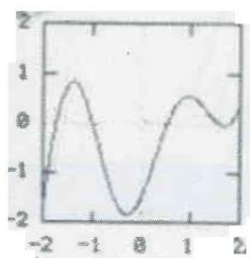
Voici le graphe de la fonction f(x).

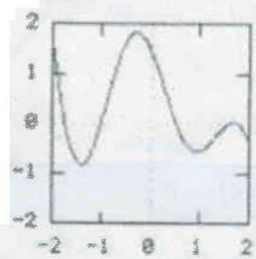


Lequel des graphes suivants représente la dérivée de f ?









Exercice 6

Utiliser les formules de la théorie pour calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 7$	b. $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$	c. $f(x) = -\frac{k}{x}$	d. $f(x) = \frac{1}{x^n}$
e. $f(x) = (x^3+2)(x^2+1)$	f. $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$	g. $f(x) = (2x-1)^6$	h. $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^4$
i. $f(x) = \sqrt{x^3 - 12x^2 + 36x + 21}$	j. $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+2}$	k. $f(x) = \sqrt{x^2+x}$	l. $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$
m. $f(x) = \sqrt{625 - 0.09x^2}$	n. $f(x) = 7(5x-3)^3$	o. $f(x) = x^2(5-x)^3$	p. $f(x) = x\sqrt{1-x}$
q. $f(x) = x^2\sqrt{4x-1}$	r. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$	s. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + (2-x)^7$	

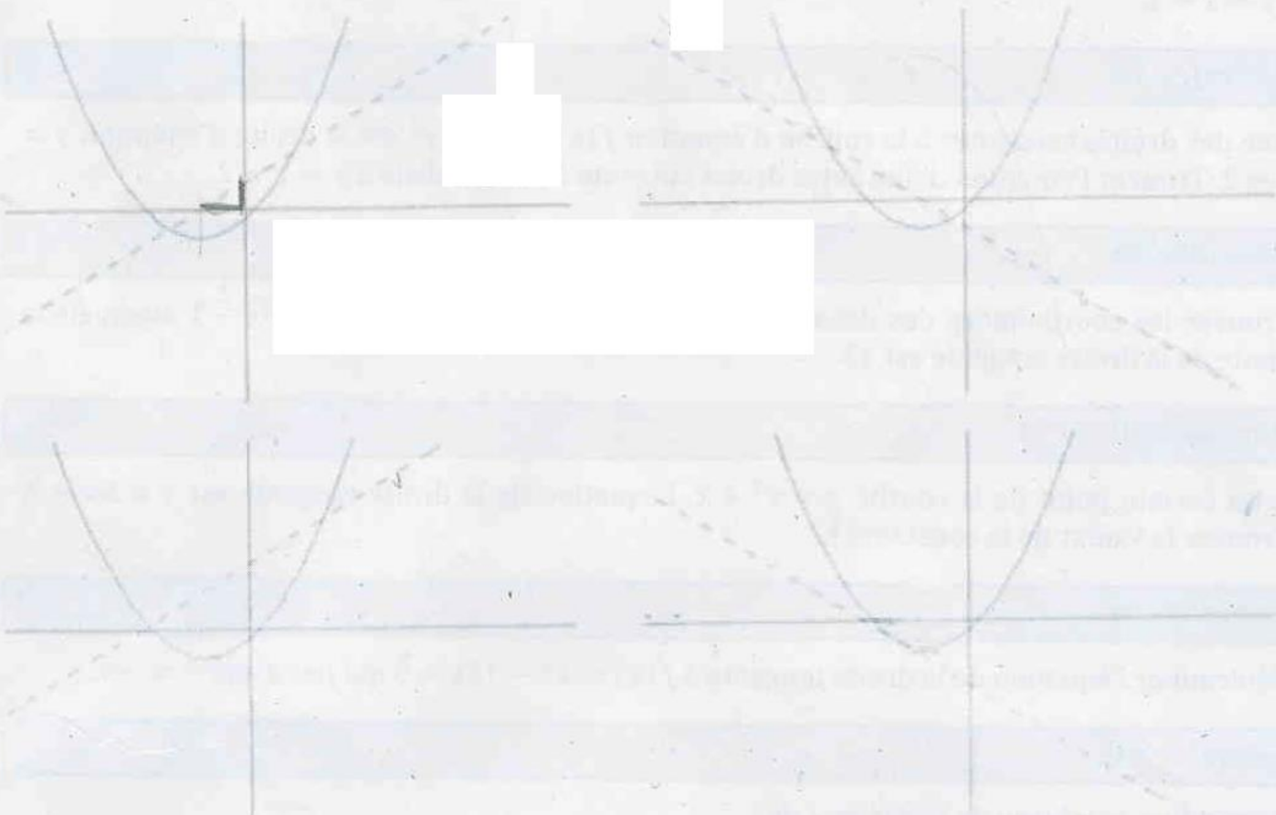
Exercice 10

Soit $y = f(x) = x^2 + 6x - 3$

1) Calculer l'équation de la tangente au graphe de f en x=1.
2) Calculer l'équation de la tangente qui a une pente de 10.
3) Calculer l'équation de la tangente horizontale.

Exercice 11

Laquelle de ces illustrations représente le graphe de la fonction et de sa dérivée (en traitillé) ? Justifier la réponse.



Exercice 12

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse donné :

(a) $y = f(x) = 4x^2 + 5x - 2$ en $x = 1$

(b) $y = f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ en $x = -2$

(c) $y = f(x) = -x^3 + 9x^2 + 4$ en $x = 0.5$

(d) $y = f(x) = \frac{-3}{x}$ en $x = 5$

(e) $y = f(x) = 5\sqrt{x} + 2$ en $x = 4$

Exercice 13

L'ordonnée d'un point P sur le graphe de $y = x^2 + 5$ vaut 9. Trouver les deux valeurs possibles pour la pente de la tangente à $y = x^2 + 5$ en P.

Exercice 14

Trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ qui est parallèle à la droite $y = x$.

Exercice 15

Trouver l'équation de la droite tangente à $y = x^2 - 2x$ qui est perpendiculaire à la droite $2y = x - 1$.

Exercice 16

Une des droites tangentes à la courbe d'équation $f(x) = 4x - x^3$ est la droite d'équation $y = x - 2$. Trouver l'équation d'une autre droite tangente à f et parallèle à $y = x - 2$.

Exercice 17

Trouver les coordonnées des deux points de la courbe $y = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$ auxquels la pente de la droite tangente est 13.

Exercice 18

A un certain point de la courbe $y = x^2 + k$, l'équation de la droite tangente est $y = 6x - 7$. Trouver la valeur de la constante k.

Exercice 19

Déterminer l'équation de la droite tangente à $f(x) = x^2 - 15x - 9$ qui passe par $x = -4$.

Exercice 20

Déterminer le tableau de croissance de :

(a) $f(x) = \frac{(x+6)(x+2)(x-1)}{12}$

(b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$

(c) $f(x) = x + \frac{3}{x}$

(d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x - 1)$

Exercice 21

Déterminer les coordonnées et les types de points critiques de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercice 22

Soit f une fonction dont on connaît le tableau de signes et le tableau de croissance :

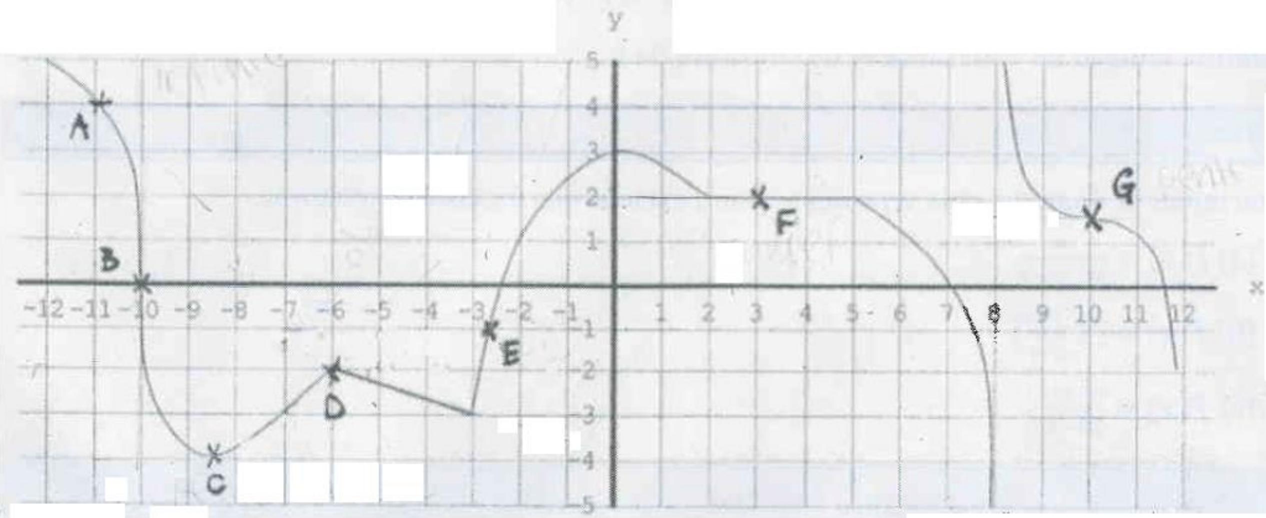
x		-3		-1		0		1	
f	+	+	+		+	0	-		-
f '	-	0	+		-	0	-		+

Esquisser proprement un graphe possible de f.

Exercice 23

Dessiner les tangentes à la courbe aux points A à G.

Indiquer les coordonnées des points et une approximation de la pente de leur tangente.



Mettre les points dans la/les bonne(s) catégorie(s) :

- Points critiques :
- Points à tangente horizontale :
- Extremum :
- Palier :

Exercice 24

Pour les fonctions f(x) suivantes, trouver f'(x) et l'intervalle dans lequel f(x) est croissante.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(b) $f(x) = 7 - 4x - 3x^2$

(c) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10$

Exercice 25

Déterminer la droite tangente à la courbe $y = 3(x-1)^2 + 5$ qui passe par l'origine.

Exercice 26

Trouver les coordonnées des points à tangente horizontale des graphes suivants et dire si ces points sont des maximums ou des minimums.

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 5$

(b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Exercice 27

Soit $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ dont on donne $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ et $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$

Etablir le tableau de croissance et de courbure de f.

Exercice 28

Déterminer le domaine et le type des valeurs exclues des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

(b) $f(x) = \frac{2x^2+4x+2}{-x^2+4}$

(c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-5}$

Exercice 29

Soit les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+4}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{6x(x^2-4x+3)}{3(x-1)(x-2)}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{(x+3)^3}{2x(x-5)}$ e) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x}$

1) Déterminer les asymptotes verticales

2) Déterminer les asymptotes non verticales

Exercice 30

Déterminer le domaine de définition, le type des valeurs exclues et les asymptotes horizontales ou obliques des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)}$

(b) $f(x) = \frac{4x^2+1}{(2x-1)(x-4)}$

(c) $f(x) = \frac{x(x^2-3)}{(2x^2-2x)^2}$

(d) $f(x) = \frac{3x^4-2x^3+x}{x(x^2-7x+10)}$

(e) $f(x) = \frac{(x^2-5x)(x^2-11x+28)}{(x-7)(x+2)(x-5)^2}$

Exercice 31

Soit $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{7(x+1)(x-2)(x+3)}$

a) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ = point

b) Calculer $\lim_{x\to -3} f(x)$

c) Calculer $\lim_{x\to 2} f(x)$

d) Calculer $\lim_{x\to -1} f(x)$

e) Calculer $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$

Exercice 32

Trouver une fonction f qui satisfait :

Asymptote verticale $x = -5$, asymptote horizontale $y = 3$.

Exercice 33

Compléter :

$f(x) = \frac{7-3x-2x^2}{(7x-5)^2}$ a une AV : $x =$ …… car $\lim\limits_{x\to} f(x) =$ ……

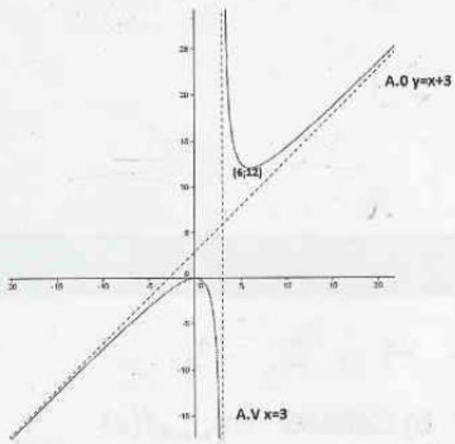
a une AH : $y =$ …… car $\lim\limits_{x\to \dots} f(x) =$ ……

Exercice 34

On donne ci-dessous le graphe d'une fonction f ; déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 6} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to \infty} f''(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 6} f'(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \infty} f'(x) =$

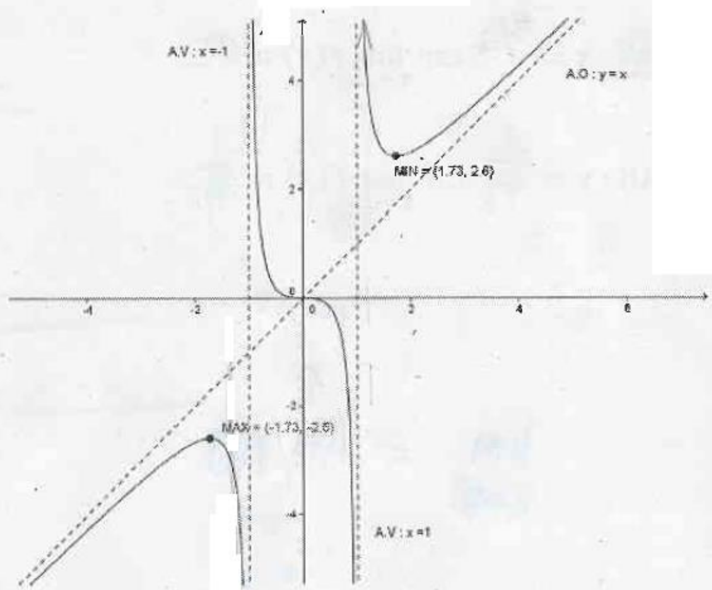


Exercice 35

On donne ci-dessous le graphe d'une fonction $f(x)$; déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1.73} f'(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1.73} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) =$



Exercice 36

Etudier les fonctions suivantes :

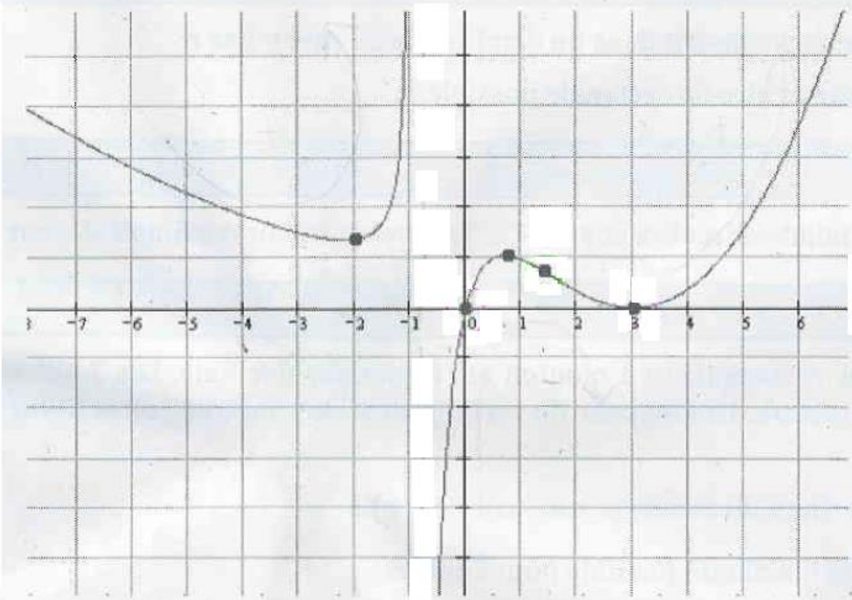
(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(b) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$

(c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Exercice 37

Soit f une fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Le domaine d'existence de f est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.



Etablir le tableau de signes de f, f' et f'' en utilisant le tableau ci-dessous.

x															
f															
f '															
f ''															

Les points marqués sur ce graphe sont (-2 ; 12), (0 ; 0), (0.7 ; 10), (1.4 ; 8) et (3 ; 0).

Exercice 38

Une boîte (parallélépipède sans couvercle) est construite à partir d'un carton de 10cm sur 10cm. Quatre carrés identiques sont coupés à chaque coin du carton, puis le carton est plié et collé afin de former une boîte. Quel est le volume maximal de cette boîte ?

Exercice 39

A une vitesse de S km/h, ma voiture fait y kilomètres avec 1 litre d'essence. On a

$y = 5 + \frac{1}{5}S - \frac{1}{800}S^2$.

Calculer la vitesse avec laquelle on fait le maximum d'économie.

Exercice 40

Une balle est lancée verticalement vers le ciel. A t secondes, sa hauteur de h mètres est données par $h = 20t - 5t^2$. Calculer la hauteur maximale atteinte par la balle.

Exercice 41

On considère un rectangle inscrit dans un demi cercle de rayon fixe r.

Quelle est la plus grande aire du rectangle possible ?

Exercice 42

La somme de deux nombres réels x et y est 12. Trouver la valeur maximale de leur produit xy.

Exercice 43

Un côté d'un enclos rectangulaire à mouton est formé par une haie. Les 3 autres côtés sont faits à l'aide d'une clôture. La longueur du rectangle est de x mètres ; on a 120m de clôture à disposition.

(a) Montrer que l'aire du rectangle est $\frac{1}{2}x(120 - x)$ m².

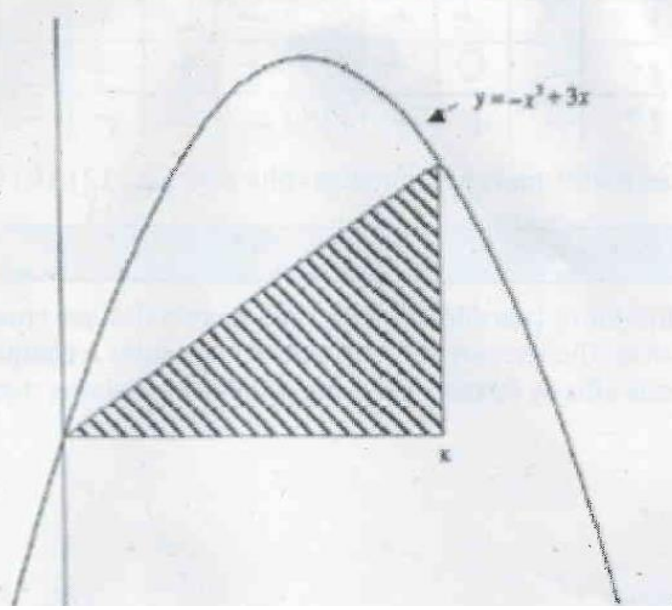
(b) Calculer l'aire maximum possible pour l'enclos.

Exercice 44

Calculer la valeur de x pour laquelle la surface de ce triangle rectangle inscrit dans cette parabole soit maximale.

(Le sommet du triangle qui est à l'origine est fixe).

Trouver cette surface maximale.



Exercice 45

On monte une tente avec une toile rectangulaire de 2m sur 4m et 2 piquets de hauteur réglable. Les côtés triangulaires de la tente restent ouverts. Calculer la hauteur de la tente pour que le volume "habitable" soit maximal.