LDDR – Niveau 2: TE 25 Algèbre Linéaire- Nombres Complexes

MATHEMATIQUES **Série A**

Problème 1 2.5 points

Dans V_3 muni de la base standard $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on considère la projection orthogonale f sur le plan π d'équation $\pi\colon 4x - y + 8z = 0$.

a) Calculer la matrice de f dans la base standard.

b) Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs du plan π et $\vec{v_3} = 8\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 16\vec{e_3}$.
Donner la matrice de f dans la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$.

Problème 2 2.5 points

Dans V_2 on considère l'application linéaire f donnée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base standard $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Les vecteurs $\vec{v_1} = 2\vec{e_1}$ et $\vec{v_2} = 4\vec{e_1} - 2\vec{e_2}$ forment une base de V_2.

Trouver la matrice de f dans la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Problème 3 3.0 points

Dans V_3 relativement à la base standard, on considère l'application linéaire f définie par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de M est $\det(M - \lambda I) = -(\overset{1}{\lambda} - 1)(\overset{4}{\lambda} - 4)^2$

Trouver tous les vecteurs propres de f, ainsi qu'une base de V_3 formée de vecteurs propres.

Problème 4 2.0 points

a) Calculer les points fixes de la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z + 4}{i(1 - z)}$$

b) L'équation $z^3 = 2 - 11i$ admet une solution $a + bi$ avec a et b entiers.
Calculer cette solution.