LDDR – Niveau 2: TE 22 Algèbre Linéaire-Nombres Complexes- Solutions

EXERCISE 1

a) La relation $F\vec{v} = \lambda\vec{v}$ conduit au système d'équations $\begin{cases} 14+2m &= 18\lambda \\ 1+4m &= 9\lambda \\ 8+5m &= 9\lambda m \end{cases}$

En soustrayant à la première ligne le double de la deuxième, on trouve $12-6m=0$, donc $m=2$. Avec cette valeur, les trois équations deviennent simplement $18 = 18\lambda$, $9 = 9\lambda$ et $18 = 18\lambda$. Elles sont compatibles avec $\lambda = 1$.

b) $\det(M-\lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2$ s'annule lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Sous-espace 0-propre :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{cases} 4x-y+z=0 \\ -2x+5y+4z=0 \\ 2x+4y+5z=0 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\dots} y+z=0$$

En choisissant $z=1$, on trouve alors $y=-1$ et $x=-1/2$.

Le sous-espace 0-propre est constitué des multiples non nuls de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Sous-espace 1-propre :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

Le sous espace 1-propre est le plan d'équation $x+2y-2z=0$.

c) Projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-2z=0$.

d) $n=1$, $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) L'angle de rotation α vérifie $1 + 2\cos\alpha = \mathrm{Tr}(G) = 1$, donc $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$.

Variante : On choisit un vecteur normal à l'axe de rotation, disons $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on calcule son image $f(\vec{v}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$. L'angle entre ces deux vecteurs est de 90° car leur produit scalaire est nul.

g) La caractéristique principale (définition) des tafnasformations orthogonales est qu'elles conservent le produit scalaire (donc les angles et les normes) : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{g(a)} \cdot \overrightarrow{g(b)} = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$

EXERCISE 2

Partie 1

$f(z) = i \cdot \bar{z} + 3 \cdot z + 1 - i$

$f(x+iy) = i \cdot (x - iy) + 3 \cdot (x+iy) + 1 - i$

$= ix + y + 3x + 3iy + 1 - i$

$= 3x+y + i \cdot (x+3y) + 1 - i$

So $\begin{cases} x' = 3x+y+1 \\ y' = x+3y-1 \end{cases}$ $\quad \vec{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{t}$

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Partie 2

a) $f(i) = 21 - 5i$ et $f(2+3i) = -1 - 11i$, donc $P_1(21; -5)$ et $P_2(-1; -11)$
$\alpha = |\arg(f(i)) - \arg(f(2+3i))| \cong |346.608° - 264.806°| = 81.802°$
Variante avec produit scalaire : $\alpha = \sphericalangle\left(\binom{21}{-5}, \binom{-1}{-11}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{34}{\sqrt{466}\sqrt{122}}\right) \cong 81.802°$

b) $f(z) = z \iff z^2 - 10z + 22 + 4i = 0$, discriminant $\Delta = 12 - 16i = (a+bi)^2$ avec comparaison des modules, des parties réelles et imaginaires :

norm $\underbrace{a^2 + b^2 = 20, \qquad a^2 - b^2 = 12,}_{2a^2=32,\ a^2=16,\ a=\pm 4} \qquad \underbrace{2ab = -16}_{b=-8/a}$ la norme est égale

On a ainsi $\Delta = (\pm(4-2i))^2$ et donc $z_{1,2} = \dfrac{10 \pm (4-2i)}{2} = 5 \pm (2-i) = \begin{cases} 7 - i \\ 3 + i \end{cases}$

c) $u = x^2 - y^2 - 9x + 22, \qquad v = 2xy - 9y + 4$

d) Si $y = x - 5$, on a $u = x^2 - (x-5)^2 - 9x + 22 = x - 3$, donc $x = u + 3$ et

$$\begin{aligned} v &= 2x(x-5) - 9(x-5) + 4 = 2x^2 - 19x + 49 \\ &= 2(u+3)^2 - 19(u+3) + 49 = 2u^2 - 7u + 10 \end{aligned}$$

e) $g(z) = f(z+i) - z^2 = (z+i)^2 - 9(z+i) + 22 + 4i - z^2 = (2i - 9)z + 21 - 5i$
Centre de rotation : $g(z) = z \iff z = \dfrac{-21+5i}{-10+2i} \cdot \dfrac{-10-2i}{-10-2i} = \dfrac{220-8i}{104} = \dfrac{55}{26} - \dfrac{1}{13}i$
Angle de rotation : $\alpha = \arg(-9+2i) \cong 167.471°$
Rapport d'homothétie : $\lambda = |-9+2i| = \sqrt{85}$