

LDDR Niveau 1 : TE 11 Analyse - solutions

LDDR / Maths I

novembre 2017 (B)

TE 1 : Analyse II

Nom :

points	note

Exercice 1. [~15 minutes, 7 pts]

On considère l'expression $f(x) = 4e^{2x} - 13e^x + 3$.

a) Calculer les points d'intersection du graphe de f avec les axes (coordonnées exactes).

$$f(0) = 4 \cdot 1 - 13 \cdot 1 + 3 = -6 \quad \text{donc } I_y(0; -6)$$

$$Z_f : 4(e^x)^2 - 13(e^x) + 3 = 0$$

$$\Delta(4; -13; 3) = 169 - 48 = 121$$

$$e^x = \frac{13 \pm 11}{8} = \begin{cases} 3 & \text{donc } x = \ln(3), I_{x1}(\ln(3); 0) \\ \frac{1}{4} & \text{donc } x = \ln(\frac{1}{4}) = -\ln(4), I_{x2}(-\ln(4); 0) \end{cases}$$

b) Calculer le(s) point(s) à tangente horizontale dans le graphe de f .

$$f'(x) = 4 \cdot 2e^{2x} - 13e^x = 8e^{2x} - 13e^x = e^x(8e^x - 13)$$

$$\text{nul lorsque } 8e^x - 13 = 0, 8e^x = 13, e^x = \frac{13}{8}, x = \ln(\frac{13}{8})$$

$$f(\ln(\frac{13}{8})) = 4 \cdot (\frac{13}{8})^2 - 13 \cdot \frac{13}{8} + 3 = \frac{169}{16} - \frac{338}{16} + \frac{48}{16} = \frac{-121}{16}$$

$$\text{p.l.h. } H(\ln(\frac{13}{8}); \frac{-121}{16})$$

c) Etablir l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse nulle.

$$f'(0) = e^0(8e^0 - 13) = 8 - 13 = -5 \quad \text{donc } t: y = -5x + h$$

$$I_y(0; -6) \in t: -6 = 0 + h \quad \text{donc } t: y = -5x - 6$$

Exercice 2. [~5 minutes, 2 pts]

Déterminer le point à tangente horizontale sur le graphe de $f(x) = \frac{x}{\ln(x) - 4}$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (\ln x - 4) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - 4)^2} = \frac{\ln x - 5}{(\ln x - 4)^2} \quad \text{nul lorsque } \ln x = 5, x = e^5$$

$$f(e^5) = \frac{e^5}{5-4} = e^5 \quad \text{donc p.l.h. } H(e^5; e^5)$$

Exercice 3. [~35 minutes, 11 pts]

- a) Résoudre l'équation $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(3x-11) + \ln(x+4)$.

$$\ln((x-2)(x+3)) = \ln((3x-11)(x+4))$$

$$(x-2)(x+3) = (3x-11)(x+4)$$

$$x^2 + x - 6 = 3x^2 + x - 44$$

$$38 = 2x^2$$

$$x^2 = 19, \quad x = \pm\sqrt{19} = \begin{cases} \sqrt{19} & \checkmark \\ -\sqrt{19} & \text{parasite} \end{cases}$$

- b) Une courbe $y = (3x^2 + a)e^{3x}$ admet un unique point à tangente horizontale. Calculer a .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6xe^{3x} + (3x^2 + a) \cdot 3e^{3x} = 3e^{3x} (2x + 3x^2 + a) \\ &= 3e^{3x} (3x^2 + 2x + a) \end{aligned}$$

$$\Delta(3; 2; a) = 4 - 12a \text{ doit être nul, donc } 12a = 4, \quad a = \frac{1}{3}$$

- c) Déterminer les limites de $f(x) = (3x^2 + 1)e^{3x}$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = " \infty \cdot \infty " = \infty \quad (\text{limite déterminée})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = " \infty \cdot 0 " = 0 \quad \text{car exp gagne dans limite indéterminée}$$

- d) Estimer $A = \log_2(55^{77} 77^{55})$ avec trois décimales (présenter clairement le raisonnement).

$$A = \frac{\ln(55^{77} 77^{55})}{\ln(2)} = \frac{77 \ln(55) + 55 \ln(77)}{\ln(2)} \approx 789.838$$

- e) Calculer l'angle entre les courbes $y = e^{4x-5}$ et $y = e^{3x-4}$ avec deux décimales.

$$\text{Intersection lorsque } e^{4x-5} = e^{3x-4}, \quad 4x-5 = 3x-4; \quad x = 1$$

$$f'(x) = 4e^{4x-5} \quad \text{et} \quad g'(x) = 3e^{3x-4}$$

$$\text{donc } f'(1) = \frac{4}{e} \quad \text{et} \quad g'(1) = \frac{3}{e}$$

$$\alpha = \left| \tan^{-1}\left(\frac{4}{e}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{e}\right) \right| \approx 7.98^\circ$$