LDDR – Niveau 1 : Analyse

1 a) Trouver sans calculatrice les valeurs suivantes :

$\exp_{11}(2)$; $\exp_3(3)$; $\exp_{0.5}(-1)$; $\exp_2(-2)$; $\exp_{81}(0.5)$; $\exp_{1000}(-1/3)$

b) Combien de décimales de $\sqrt{2}$ faut-il considérer pour estimer $3^{\sqrt{2}}$ avec une erreur inférieure à 0.00001 ?

2 Mettre sous la forme $a^{m/n}$ les expressions suivantes :

$$A = (a^3)^{-1}(a^{-5})^2 a^6 \qquad B = \frac{(a^2)^3}{a^2 a^3} \qquad C = \frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[2]{a^3}}{a}$$

$$D = \frac{a^2\cdot\sqrt[4]{a}}{a^5\cdot\sqrt{a}} \qquad E = \left(\frac{(a^3)^2}{\sqrt[4]{a^5\cdot a^2}}\right)^2 \qquad F = \frac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[7]{a^4}}\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}}$$

3 Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} \qquad B = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} \qquad C = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$

$$D = \lim_{x\to 0}(1-4x)^{1/x} \qquad E = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x} \qquad F = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+1}$$

4 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{5x} \qquad f_2(x) = e^{x^2+3} \qquad f_3(x) = x^2 e^x \qquad f_4(x) = e^{\sin(x)}$$

$$f_5(x) = e^{2/x} \qquad f_6(x) = \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad f_7(x) = e^{-x}\cos(x) \qquad f_8(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x-1}}$$ u

5 Calculer mentalement (par convention, on note "log" au lieu de "$\log_{10}$")

$\log_5(1)$ $\log(1000)$ $\log(0,0001)$ $\log_2(8)$ $\log_2(64)$

$\log_2(1024)$ $\log_3\left(\frac{1}{3^{17}}\right)$ $\log_9(729)$ $\log_3(729)$ $\log_3(\sqrt[4]{27})$

6 Donner une approximation à trois décimales des nombres suivants.

$A = \log_5(6)$, $B = \log_2(20)$, $C = \log_7(0,2)$, $D = \log_\pi(10)$, $E = \log_{17}(1245)$

7 Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\ln(x) + b\ln(y)$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$A = \ln(x^2y^3) \qquad B = \ln(xy^2\sqrt{y}) \qquad C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}y^2}\right) \qquad D = \ln\left(\frac{x^7y^4}{\sqrt[5]{x^2}\ \sqrt[3]{y}}\right)$$

8 Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme.

$$A = 5\ln(x) - \ln(5x) - \tfrac{1}{2}\ln(x^4) \qquad B = \ln(y^3) + \tfrac{1}{3}\ln(x^3y^6) - 5\ln(y)$$

$$C = 2\ln(y^3/x) - 3\ln(y) + \tfrac{1}{2}\ln(x^4y^2) \qquad D = \ln(x^3y^2) - 2\ln(x\sqrt{y}) - 3\ln(x/y)$$

$$E = 2\ln(x) - 4\ln(1/y) - 3\ln(xy) \qquad F = \log_2(3)\log_3(4)\log_4(5)$$

9 Déterminer le nombre de chiffres et les quatre premiers chiffres de
$A = 7^{1234}$, $B = 13^{1746}$, $C = 2^{6972593} - 1$ (nombre premier découvert en 1999)

10 Résoudre les équations suivantes

a) $7^{2x+3} = 7^{x^2}$ b) $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ c) $(0.5)^{6-x} = 2^3$ d) $\log_x(64) = 3$

e) $\log_x(1) = 0$ f) $\log_4(x) = -3$ g) $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$

h) $\log(8x-6) - \log(x-4) = 1$ i) $\log(3x+1) = 3$ j) $2^x 3^{2x} = 100$

k) $\log|3x-4| = 2\log(3)$ l) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ m) $8e^x + e^{-x} = 6$

n) $\ln|x+4| + \ln(3) = \ln|x-2|$ o) $(\ln x)^2 - 2\ln(x) = 3$

11 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \ln(x-1)$ $f_2(x) = \ln(3x^5)$ $f_3(x) = x\ln(x) - x$ $f_4(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

$f_5(x) = \ln|\cos x|$ $f_6(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ $f_7(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $f_8(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

12 Traiter les problèmes suivants qui nécessitent tous la dérivée.

a) Déterminer la tangente à la courbe $y = (e^{2x} - 3)^3$ en son point d'abscisse nulle.
b) Déterminer les points de la courbe $y = e^{2x} - 8e^x + 9x$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $d : 3x - y - 21 = 0$.
c) Discuter du nombre de points à tangente horizontale de $f(x) = (x^2 + a)e^x$ en fonction de la valeur de a.
d) Déterminer l'angle aigu formé par les courbes $y = 2e^x$ et $y = xe^x$ à leur intersection. Idem pour les courbes $y = \log_2(x)$ et $y = \log_5(x)$.
e) Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, les courbes $y = \sqrt{a - 2x}$ et $y = e^{x+b}$ se coupent à angle droit.

13 Déterminer les limites suivantes

$$A = \lim_{x\to-\infty} (x^{54}e^x) \qquad B = \lim_{x\to 0} (x\ln x) \qquad C = \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2 - 3x + 4)^3}{(2x^3 + x^2 - 5)^2}$$

$$D = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{500}\ln(x)}{2^x} \qquad E = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x - 4}{3e^x + 5} \qquad F = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+4)^5}{(x^2 + 7x + 41)^2}$$

14 Etudier les fonctions suivantes (domaine de définition, tableau de signes, intersections du graphe avec les axes, limites vers les exclus et aux bords du domaine de définition, dérivée, tableau de croissance, points à tangente horizontale et graphe) :

$f_1(x) = 2xe^{-x}$ $f_2(x) = (x-2)^2 e^x$ $f_3(x) = x\ln(x/2)$ $f_4(x) = \ln(x^2 + 4)$

15 Le radium se désintègre selon la loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/1600}$: si on considère une quantité N_0 de radium pur, alors t années plus tard il en restera une quantité $N(t)$.

a) Combien restera-t-il de radium dans 100 ans s'il y en a 50 mg maintenant ?

b) Quand restera-t-il 20 mg de radium s'il y en a 50 mg au début ?

c) Quelle est la demi-vie du radium (= temps durant lequel la moitié des atomes initialement présents se désintègre) ?

16 Le carbone-14 se désintègre selon une loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{ct}$ et sa demi-vie est d'environ 5'700 ans. Des archéologues ont trouvé un os qui contient 20% de la quantité de carbone-14 contenue dans un os actuel. Quel est l'âge de cet os ?

17 a) Vérifier que cosh est une fonction paire alors que sinh et tanh sont impaires.

b) Démontrer les relations fondamentale

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{et} \quad \tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1,$$

c) Démontrer les formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y).$$

d) Simplifier les expressions $\cosh(3\ln(2x))$ et $\tanh(2\ln(3x))$.

e) Calculer les dérivées $\cosh'(x)$, $\sinh'(x)$ et $\tanh'(x)$.

f) Résoudre les équations suivantes

$$\sinh(x) = 2, \qquad 3\cosh(x) = 5\sinh(x), \qquad 5\sinh(x) - \cosh(x) = 1.$$

g) Esquisser le graphe de sinh et indiquer l'ensemble des images. Idem pour cosh.

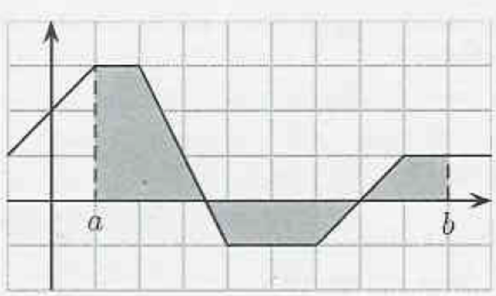
h) Résoudre l'équation $\sinh(x) = y$ et en déduire l'expression de la fonction réciproque $\text{arcsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$. Idem pour cosh.

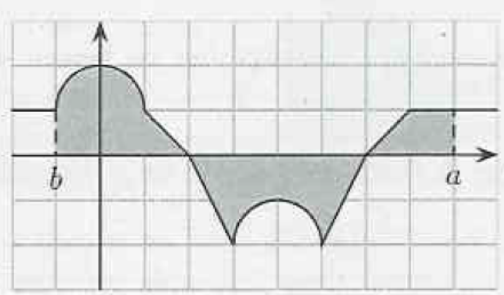
i) Dessiner l'ensemble des points $(\cosh(t); \sinh(t))$ pour $t \in [-2; 2]$

18 On considère la fonction $f(x) = 2x + 1$ et on pose $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Exprimer $F(t)$ puis calculer $\int_0^7 f(x)dx$ et $\int_3^6 f(x)dx$. Trouver la dérivée de $F(x)$.

19 Calculer $\displaystyle\int_0^b x^3 dx$ grâce à la formule $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \dfrac{(n-1)^2 n^2}{4}$.

20 Déterminer $\int_a^b f(x)dx$ ainsi que l'aire de la surface grise dans les cas suivants :





21 Sachant que $\int_0^2 f(x)dx = 4$, $\int_1^2 f(x)dx = 5$ et $\int_0^2 g(x)dx = -7$, calculer

$$A = \int_2^0 f(x)dx, \quad B = \int_0^1 f(x)dx, \quad C = \int_0^2 3g(x)dx, \quad D = \int_0^2 (2f(x) - g(x))dx$$

22 Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = -x^2 + 5x + 3 \qquad f_2(x) = (x-2)^5 \qquad f_3(x) = \cos(4x+5)$$

$$f_4(x) = \sqrt{7x - 11} \qquad f_5(x) = \sqrt[3]{x^2} \qquad f_6(x) = e^{-2x+9}$$

$$f_7(x) = \frac{2}{(3x+7)^3} \qquad f_8(x) = \frac{1}{2x-3} \qquad f_9(x) = \frac{1}{\sqrt{6x-1}}$$

23 Calculer les intégrales suivantes (approximations à trois décimales) :

$$A = \int_{-1}^3 (x^3 - 2x + 1)dx, \quad B = \int_0^\pi \sin(2t)dt, \quad C = \int_1^3 e^{2x}dx, \quad D = \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt$$

24 Calculer les intégrales suivantes (avec $0 < a < 1 < b$) :

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_1^b \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Indiquer le comportement de chaque intégrale lorsque $a \to 0$ ou $b \to \infty$.

25 Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = x\cos(x) \qquad f_2(x) = x\sqrt{1+x} \qquad f_3(x) = x^2\sin(x) \qquad f_4(x) = x^2\ln(x)$$

$$f_5(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad f_6(x) = \ln(2x)\sqrt{x} \qquad f_7(x) = (\sin x)^2 \qquad f_8(x) = x^3e^{2x}$$

26 Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 4) \qquad f_2(x) = e^{2x}(13\sin(x) - 11\cos(x))$$

$$f_3(x) = e^{4x}(4x^2 - 10x - 1) \qquad f_4(x) = e^{-3x}(3\cos(x) + 4\sin(x))$$

27 Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x(x^2+1)^5 \qquad f_2(x) = e^{-4x+5} \qquad f_3(x) = \sqrt{3x+4} \qquad f_4(x) = x^2\sin(x^3)$$

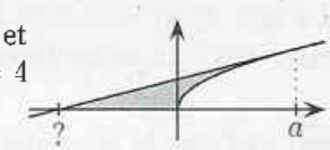
$$f_5(x) = \frac{2x}{3+x^2} \qquad f_6(x) = \frac{3e^x}{5-2e^x} \qquad f_7(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}} \qquad f_8(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

28 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ de trois manières différentes :

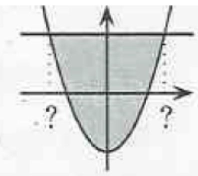
a) en substituant $x = u - 1$ b) en substituant $x = t^2 - 1$ c) par parties.

29 Décrire ou dessiner le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ puis calculer l'intégrale $A = \int_{-1}^1 f(x)dx$ grâce à l'astucieuse substitution $x = \sin(t)$.

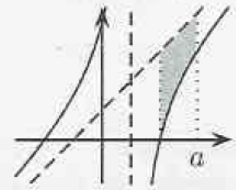
30 Déterminer l'aire délimitée par l'axe Ox, la courbe $y = \sqrt{x}$ et sa tangente en son point d'abscisse $x = a$ (considérer $a = 4$ en cas de problème).



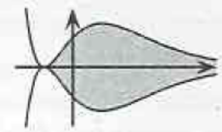
31 On considère un nombre $a > 0$ (prendre $a = 2$ en cas de problème). Exprimer l'aire de la surface délimitée par la parabole $y = x^2 - a$ et la droite horizontale $y = a$.



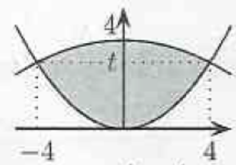
32 On considère l'expression $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$. Exprimer l'aire comprise entre le graphe de f, son asymptote oblique (à déterminer) et les droites verticales $x = 2$ et $x = a$ avec $a > 2$. Trouver la valeur de a pour laquelle cette aire vaut 5.



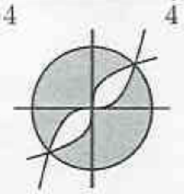
33 On considère un nombre réel a (prendre $a = 3$ en cas de problème) et l'expression $f(x) = (x - a)^2 e^{-x}$. Exprimer l'aire de la surface infinie délimitée par les courbes $y = f(x)$ et $y = -f(x)$.



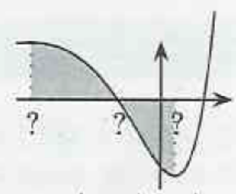
34 Déterminer (en fonction de t) les équations des deux paraboles illustrées ci-contre et calculer l'aire de la surface fermée qu'elles délimitent. Trouver la valeur de t pour que les paraboles se coupent à angle droit.



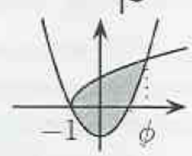
35 Calculer l'aire grisée représentée ci-contre, délimitée par le cercle centré en l'origine passant par le point $P(1;1)$, le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ et celui de sa fonction réciproque $g(x) = \sqrt[3]{x}$.



36 Calculer avec quatre décimales l'aire de la surface délimitée par l'axe Ox et la courbe $y = \frac{1}{2}(x^2 - 9)e^{x/4}$ entre ses deux points à tangente horizontale.
Déterminer l'angle aigu sous lequel la courbe coupe l'axe Oy.



37 Montrer que les courbes $y = x^2 - 1$ et $y = \sqrt{x + 1}$ se coupent lorsque $x = -1$ et $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (noté ϕ). Calculer l'aire exacte de la surface qu'elles délimitent en utilisant la relation $\phi^2 = \phi + 1$.



38 Calculer la moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

a) $f(x) = 6x^2 - 4x - 6,\ I = [-1; 3]$ b) $f(x) = \sin(2x),\ I = [\pi/2; \pi]$

c) $f(x) = (2x + 3)^3,\ I = [-2; 2]$ d) $f(x) = e^{2x+1},\ I = [-2; 3]$

e) $f(x) = (x^2 - 9)e^{x/3},\ I = [0, 3]$ f) $f(x) = x\ln(x),\ I = [1; e]$

g) $f(x) = x\sqrt{r^2 - x^2},\ I = [0; r]$ h) $f(x) = x^2\sin(x),\ I = [0; \pi]$

39 Trouver une primitive pour les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \frac{-3x}{(2x^2 + 9)^3} \qquad f_2(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x - 3} \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$f_4(x) = \cos(x)e^{3x} \qquad f_5(x) = (x^2 + 2)\sin(x) \qquad f_6(x) = \cos^3(x)$$

$$f_7(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{1 - x} \qquad f_8(x) = x(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) \qquad f_9(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$