LDDR – Niveau 1 : Dérivée- Etude d'une fonction

Exercice 28. *La parabole d'équation $y =$ .... est représentée ci-dessous.*

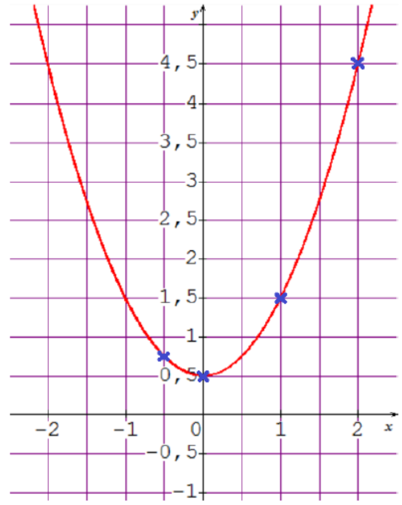
a) *Dessinez le mieux possible les tangentes à la parabole en $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.*

b) *Estimez au mieux la valeur de la pente de chaque tangente en complétant ci-dessous :*

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \ldots.. \qquad f'(0) = \ldots..$$

$$f'(1) = \ldots.. \qquad f'(2) = \ldots..$$

c) *Grâce aux valeurs de b), déduisez : $f'(x) = \ldots..$*



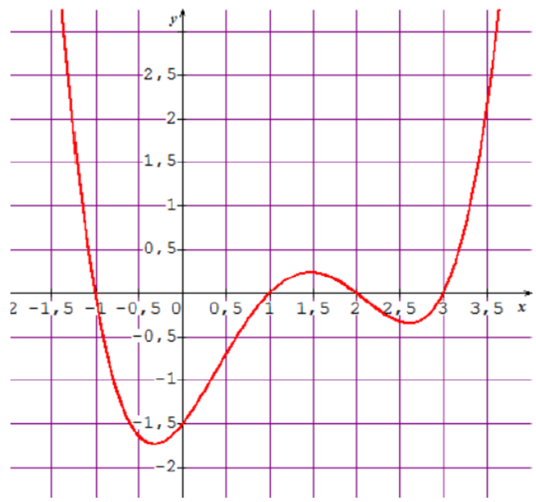
Exercice 29. *Sur le graphe de la fonction $f(x)$ ci-contre, indiquez les valeurs approximatives de x pour lesquelles :*

a) $f(x) = 0$ *b)* $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 1$ *d)* $f'(x) = -4$

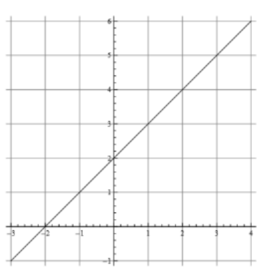
e) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

Mettez en évidence les points de f concernés en traçant les tangentes au graphe de f ayant les pentes indiquées.



Exercice 30. *Complétez :*

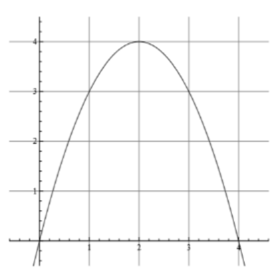
1) $f(x) =$



$f(0) =$

$f'(0) =$

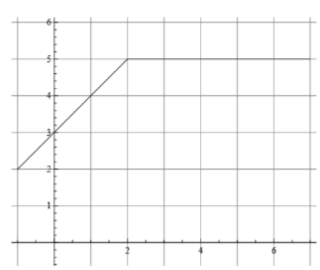
2) $g(x) =$



$g(2) =$

$g'(2) =$

3) $h(x) =$



$h(6) =$ $h(2) =$

$h'(6) =$ $h'(2) =$

Exercice 31.

a) *Soit la fonction* $f : x \longmapsto y = 2x + 3$.
Que vaut $f(1)$ *? Que vaut* $f'(1)$ *? Que vaut* $f'(x)$ *? Géométriquement, à quoi correspond* $f'(x)$ *?*

b) *Que pouvons-nous dire d'une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *dont la dérivée vaut toujours 0 ?*

c) *Esquissez la fonction* $f : x \longmapsto y = |x|$. *Est-elle dérivable en* $x_0 = 0$ *?*

d) *Esquissez la fonction* $f : x \longmapsto y = \frac{1}{x}$. *Pour quel* x_0, $f'(x_0)$ *n'est-elle pas définie ?*

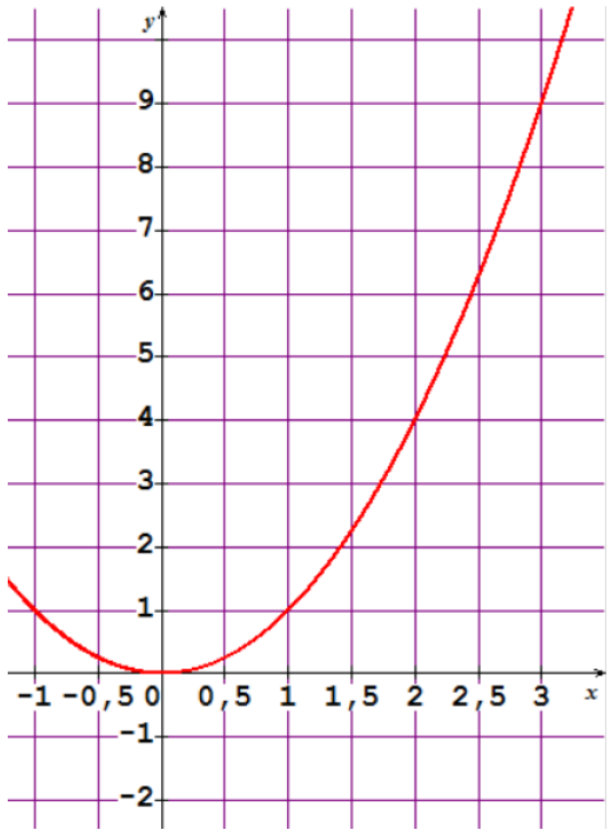
Exercice 32. *Dessinez le graphe d'une fonction continue* f *telle que* $f(2) = 1$, $f'(2) = 0$, $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$, $f(7) = 0$ *et* $f'(7)$ *n'est pas définie.*

Exercice 33. ***But :*** *Déterminer la pente de la tangente d'une fonction* f *à partir de son expression fonctionnelle* $f(x)$.

En utilisant le graphe de la fonction $f(x) = x^2$ *ci-derrière, réalisez les étapes suivantes :*

1. *Tracez la sécante* s_1 *au graphe de* f *passant par* $A(1; f(1))$ *et* $B_1(3; f(3))$.
2. *Calculez la pente de la sécante* s_1.
3. *Tracez la sécante* s_2 *au graphe de* f *passant par* A *et* $B_2(2; f(2))$.
4. *Calculez la pente de la sécante* s_2.
5. *Tracez la sécante* s_3 *au graphe de* f *passant par* A *et* $B_3(1,5; f(1,5))$.
6. *Calculez la pente de la sécante* s_3.
7. *Tracez la tangente* t *au graphe de la fonction* f *en* A.
8. *Calculez la pente de la tangente* t *qui correspond à* $f'(1)$. *Remarquez que les pentes des sécantes tracées se rapprochent de la pente de* t *et donc de* $f'(1)$.
9. *Afin d'approcher au mieux* $f'(1)$ *sans recourir à son graphe :*
   a) *calculez la pente de la sécante* s_x *passant par* A *et* $B_x(1 + \Delta x; f(1 + \Delta x))$,
   b) *puis calculez la limite de cette pente lorsque* Δx *tend vers* 0.
10. *Comparez cette limite avec la pente de la tangente* t.

Reprenez la stratégie du point 9. pour déterminer $f'(2)$ *puis* $f'(x)$.



Exercice 34.

a) *En utilisant la définition algébrique de la dérivée, déterminez la dérivée des fonctions suivantes :*

$f(x) = 1 - x$	$g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$	$h(x) = \dfrac{1}{x}$
$^*i(x) = \dfrac{1}{3-2x}$	$j(x) = x^3$	$k(x) = \sqrt{x}$
$l(x) = 6$	$m(x) = ax + b$	$n(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) *Calculez $f'(2)$, $g'(1)$ et $h'(-2)$.*

c) *Déterminez l'équation de la tangente au graphe de g au point P d'abscisse 1. Déterminez alors l'angle entre cette tangente et l'axe Ox.*

***Exercice 35.** *Donnez l'équation de la tangente t au graphe de la fonction*

$$f : x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ au point } P \text{ d'abscisse } 4.$$

Exercice 36. *a) En quel(s) point(s) du graphe de $f : y = x^2$, la tangente est-elle parallèle à la droite $d : 2x + 3y - 2017 = 0$?*

b) Quel angle cette tangente forme-t-elle avec l'axe des x ?

Exercice 38. *A l'aide de la règle de dérivation de $f(x) = x^n$, déterminez les dérivées $f'(x)$ des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = x^9$ *b)* $f(x) = x^{12}$ *c)* $f(x) = x^{134}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *e)* $f(x) = \dfrac{1}{x^{14}}$ *f)* $f(x) = \sqrt[4]{x}$

g) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ **h)* $f(x) = \sqrt[25]{x^{37}}$ **i)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$

Exercice 39. *En utilisant ces rappels, les propriétés des limites ainsi que la définition algébrique de la dérivée, déterminez la dérivée des fonctions* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$		

Exercice 40. *Démontrez la règle de dérivation N° 4 en utilisant la règle N° 3 pour dériver l'égalité* $\dfrac{u(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x)$.

Exercice 41. *Dérivez les fonctions suivantes en vous aidant des règles de dérivation :*

a) $f(x) = \overbrace{x^3}^{u(x)} \overbrace{- \cos(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

b) $f(x) = \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{u(x)} + \overbrace{\sqrt[3]{x}}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

c) $f(x) = \overbrace{5}^{\lambda} \overbrace{x^{100}}^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

d) $f(x) = \overbrace{2x^2}^{\lambda \cdot u(x)} \overbrace{-3x}^{\mu \cdot v(x)} \overbrace{+4}^{\nu \cdot w(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

e) $f(x) = \overbrace{x^2}^{u(x)} \overbrace{\cos(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

f) $f(x) = \overbrace{2\sqrt{x}}^{\lambda \cdot u(x)} \overbrace{\sin(x)}^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

g) $f(x) = \dfrac{\overbrace{3x^2 - 2}^{u(x)}}{\underbrace{x^2 + 1}_{v(x)}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

Exercice 42. *A l'aide de la 4ème règle de dérivation, déterminez la dérivée de la fonction* $\tan(x)$ *et exprimez-la de deux manières différentes.*

Exercice 43. *Montrez que pour toute fonction dérivable* $f \neq 0$ *:* $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Exercice 44. ***Tableau des dérivées des fonctions usuelles.*** *Complétez :*

$f(x)$	*1*	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$f'(x)$										

Exercice 45. *Calculez les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f_1(x) = x^3 - 5x + \frac{3}{x^2}$ *b)* $f_2(x) = 6\sqrt{x} - x$ *c)* $f_3(x) = 3x^2\sqrt{x}$

d) $f_4(x) = a\sin(x) - b\cos(x)$ *e)* $f_5(x) = \cos^2(x)$ *f)* $f_6(x) = \frac{2x^3+7x}{5x+3}$

g) $f_7(x) = 2(x-3)(x+6)$ *h)* $f_8(x) = \sqrt[5]{x^2}$ *i)* $f_9(x) = x\cos(x)$

j) $f_{10}(x) = 8\cos(x) - 4x^2$ *k)* $f_{11}(x) = \sin^2(x)$ *l)* $f_{12}(x) = \frac{x^{-4}}{12} - \frac{6}{x^{-2}}$

m) $f_{13}(x) = (2x+7)\tan(x)$ *n)* $f_{14}(x) = \frac{2}{\sin(x)}$ *o)* $f_{15}(x) = \frac{4\cos(x)}{1+\sin(x)}$

Exercice 46. *Même exercice :*

a) $f_1(x) = x^3(sin(x)+1)$ *b)* $f_2(x) = \sin(x)\cos(x)$ *c)* $f_3(x) = \frac{x}{1+4x}$

d) $f_4(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *e)* $f_5(x) = (4-x^2)\sin(x)$ *f)* $f_6(x) = \frac{x}{1+x^3}$

g) $f_7(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ *h)* $f_8(x) = 5\sin(x) - 3x^2$ *i)* $f_9(x) = 5\cos(x) - \frac{3}{x}$

j) $f_{10}(x) = 9x^5$ *k)* $f_{11}(x) = 2x^3(4x^3 - 3x)$ *l)* $f_{12}(x) = 4x^2\sqrt{x}$

Exercice 47. *Déterminez les coordonnées des points de la courbe* $y = 4x^3 + 15x^2 - \frac{30}{2}x + 2$ *en lesquels la tangente a une pente égale à 3.*

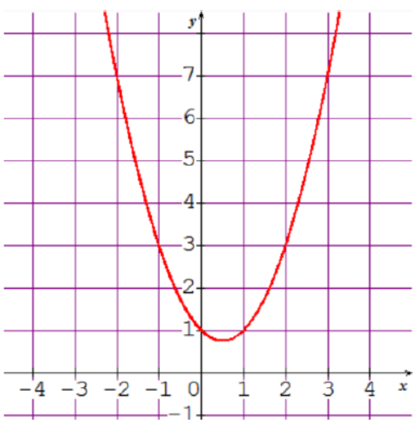
Exercice 48. *Déterminez les coordonnées des points de la courbe* $y = x^4 - 6x^2 + 8x$ *en lesquels la pente de la tangente est nulle.*

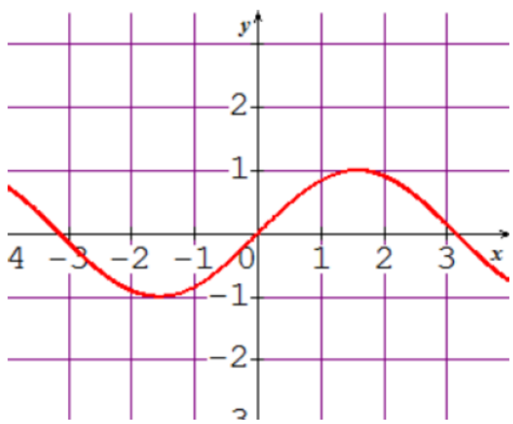
Exercice 49. *En un point de la courbe* $y = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$, *l'équation de la tangente est* $y = 6x - 7$. *Déterminez la valeur de* k *ainsi que les coordonnées du point.*

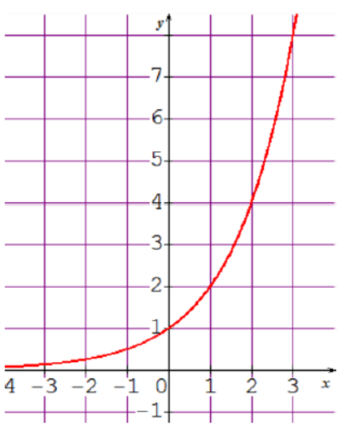
Exercice 50. *Pour chacune des fonctions dont le graphe est représenté ci-dessous, complétez un tableau du type :*

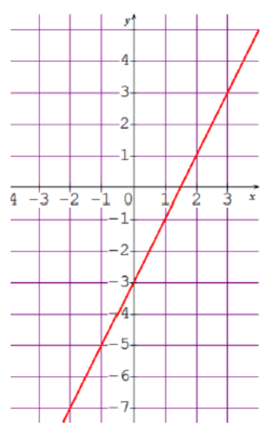
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

puis esquissez le graphe de la dérivée.









Exercice 51. *Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée $f'(x)$ de la fonction* $f : x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ *s'annule-t-elle ? Avec quoi ce résultat peut-il être mis en lien ?*

Exercice 52. *Déterminez l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = 2x^2 - 6x + 1$ au point $T(-1; ?)$. Quel angle cette tangente forme-t-elle avec l'axe des x ?*

* **Exercice 53.** *Déterminez les coordonnées des points à tangente horizontale de la fonction*

$$f : x \longmapsto y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x.$$

Exercice 54. *En quel point la tangente au graphe de $f : x \longmapsto y = \sqrt{x}$ est-elle parallèle à la droite $d : x - 4y - 23 = 0$?*

* **Exercice 55.** *Trouver la fonction $x \longmapsto y = f(x) = x^2 + bx + c$ dont le graphe admet la droite $d : 2x - y - 1 = 0$ comme tangente au point d'abscisse $x = 3$.*

Exercice 56. *Déterminez l'angle obtu entre les paraboles $\mathcal{P}_1 : y = x^2 - 3$ et $\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + 2x + 1$ en chaque point d'intersection.*

Indication *: L'angle entre deux courbes en un point d'intersection I est l'angle formé par les tangentes à ces courbes en I !*

Exercice 57. *Déterminez l'équation de la tangente à* $y = \dfrac{x^2+3}{x+3}$ *en $x = 1$.*

* **Exercice 58.** *Quels sont les points de la courbe d'équation $\mathcal{C} : y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ? Donnez ensuite l'équation de ces tangentes.*

Exercice 59. *Soit $f(x) = (3x + 1)^2$.*

a) *Déterminez $f'(x)$ sans développer f.*

b) *Développez $f(x)$.*

c) *Déterminez $f'(x)$ à partir de b), puis factorisez votre réponse.*

d) *Comparez les réponses de a) et c). D'où peut provenir l'éventuelle différence ?*

Exercice 60. *Calculez les dérivées des fonctions composées suivantes :*

a) $x \mapsto y = (\frac{1}{2}x - 5)^2$ *b)* $x \mapsto y = (x^2+2)^3$ *c)* $x \mapsto y = (4x^2 - 7x + 3)^4$

d) $x \mapsto y = \sqrt{x^2+1}$ *e)* $x \mapsto y = \cos^3(x)$ *f)* $x \mapsto y = 2\sin(x^2+1)$

g) $x \mapsto y = \sqrt{\sin(x)}$ *h)* $x \mapsto y = x^3 \sin(2x)$ *i)* $x \mapsto y = ((x^2-1)^5+1)^2$

j) $x \mapsto y = \cos^2(x^2)$ *k)* $x \mapsto y = \sqrt{x}\sin(3x)$ *l)* $x \mapsto y = \sqrt{1+\cos^3(x)}$

m) $x \mapsto y = \sin(2\sqrt{x})$ *n)* $x \mapsto y = \cos(\sin(x))$ *o)* $x \mapsto y = \sin(2x)\cos(3x)$

* **Exercice 61.** *Même exercice :*

a) $f(x) = (x^3 - 2x)^4$ *b)* $f(x) = (x^2+3)^{10}$ *c)* $f(x) = (4x^2 - x + 2)^5$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 4x - 1}$ *e)* $f(x) = \cos^2(x)$ *f)* $f(x) = \sin^4(x)$

g) $f(x) = (\sqrt{x})^8$ *h)* $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ *i)* $f(x) = \sqrt{3x^5 - 2}$

j) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$ *k)* $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^5}$ *l)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

Exercice 62. *Déterminez l'équation de la tangente à la courbe d'équation* $y = \sqrt{5x+1}$ *en son point d'abscisse* $x = 3$.

Quel angle cette tangente forme-t-elle avec l'axe des y ?

* **Exercice 63.** *Déterminez une équation de la tangente à chacune des courbes suivantes en son point d'abscisse* x_0 *:*

a) $y = \dfrac{3x-2}{5x-9}$, $x_0 = 2$ *b)* $y = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$, $x_0 = 2$ *c)* $y = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$, $x_0 = \pi$

Exercice 64. *Par des expériences, nous pouvons constater que le chemin parcouru (l) par un corps en chute libre est proportionnel au carré du temps écoulé :*

$$l(t) = \frac{g}{2}t^2, \text{ où } g \text{ est la gravité terrestre } (9{,}81 m/s^2).$$

a) *Quelle est la vitesse instantanée de ce corps au temps t ?*

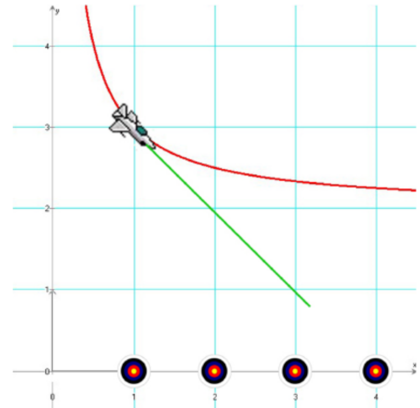
**b)* *Le 14 octobre 2012, Felix B. a battu le record du monde de vitesse en chute libre en tombant à 1357,6 km/h. En imaginant qu'il ait accéléré de manière constante, après combien de temps de chute libre a-t-il atteint cette vitesse ?*

Exercice 65. *Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, nous pouvons voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3 et 4.*

Nous savons que la trajectoire de l'avion a pour équation $y = \dfrac{2x+1}{x}$, $x > 0$.

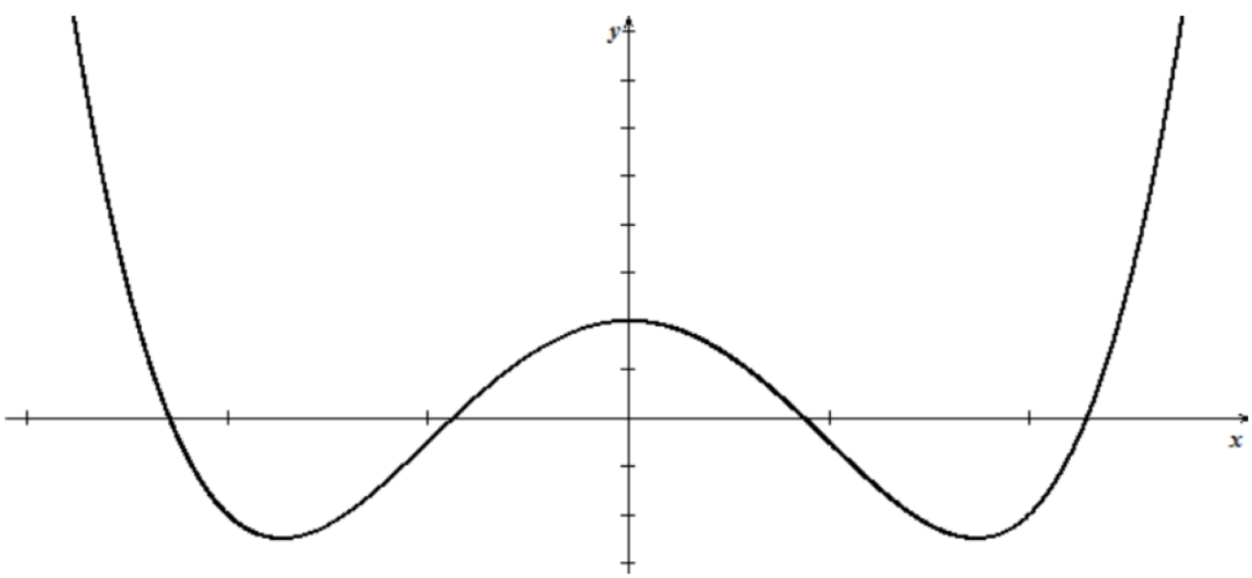
a) *La cible N° 4 sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en* $(1;3)$ *?*

* b) *Déterminez l'abscisse permettant d'atteindre le centre de la cible N° 2.*



Exercice 66. *Soit le graphe d'une fonction f représentée ci-dessous.*

1. *Passez en rouge sur la partie du graphe de f qui est* **décroissante** *et en bleu sur la partie* **croissante**.
2. *Placez en vert le signe « — · — » aux points précis où le graphe de f est « plat », c'est-à-dire où sa* **croissance est nulle**.
3. *Dans les mêmes couleurs mais de manière légère, tracez dans chacune des zones décrites une tangente au graphe.*
4. *Que dire de la pente de la tangente au graphe de f en lien avec la croissance de cette fonction ?*
5. *Que dire du signe de la dérivée de f en lien avec la croissance de cette fonction ?*



Exercice 67. *Dans une expérience de laboratoire, le nombre de bactéries après t heures est donné par* $n = f(t)$.

a) *Quelle est la signification de* $f'(5)$ *? En quelles unités s'exprime* $f'(5)$ *?*

b) *Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée, lequel des deux nombres* $f'(5)$ *et* $f'(10)$ *sera le plus grand ?*

Exercice 68. *Dessinez un graphe possible de* $y = f(x)$ *connaissant les informations suivantes sur la dérivée :*

- ⋆ $f'(x) > 0$ *pour* $1 < x < 3$;
- ⋆ $f'(x) < 0$ *pour* $x < 1$ *ou* $x > 3$;
- ⋆ $f'(x) = 0$ *pour* $x = 1$ *et* $x = 3$;

Exercice 69. *Dessinez une courbe dont la pente partout...*

a) *...positive croît continûment.*

b) *...positive décroît continûment.*

c) *...négative croît continûment.*

d) *...négative décroît continûment.*

Exercice 70. *Étudiez les points à tangente horizontale des fonctions suivantes en déterminant leurs coordonnées et leur type :*

a) $y = \frac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 12x$ b) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ c) $y = (x^2 - 4)^2$

***Exercice 71.** *Montrez que le graphe de la fonction* $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+2}$ *ne possède aucun point à tangente horizontale.*

***Exercice 72.** *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$.

a) *Déterminez les points à tangente horizontale du graphe de* f *puis établir le tableau de croissance de* f.

b) *Déterminez tous les zéros de* f *puis représentez son graphe.*

Exercice 73. *Pour quelles valeurs de a la fonction $f : y = x^3 + ax^2 + x$ n'admet-elle aucun point à tangente horizontale ?*

Exercice 74. *Vrai ou faux ? La fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ est toujours croissante.*

***Exercice 75.** *Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x \cdot (x-a)}{x^2+4}$, avec $a \in \mathbb{R}$.*

a) Montrez que pour toute valeur de $a \neq 0$, le graphe de f admet deux points à tangente horizontale.

b) Combien de points à tangente horizontale le graphe de f possède-t-il si $a = 0$?

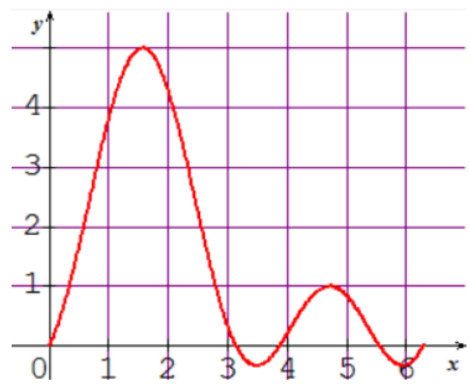
***Exercice 76.**

a) Soit la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminez les valeurs de a et b de telle sorte que le point $T(1;1)$ soit un point à tangente horizontale. Déterminez son type.

b) Sachant que $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ admet la tangente $y = -2,5x + 4$ au point d'abscisse -1, trouvez les valeurs de a et b.

Exercice 77.

Le graphe de la fonction $f(x) = 3\sin^2(x) + 2\sin(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$, est représenté.



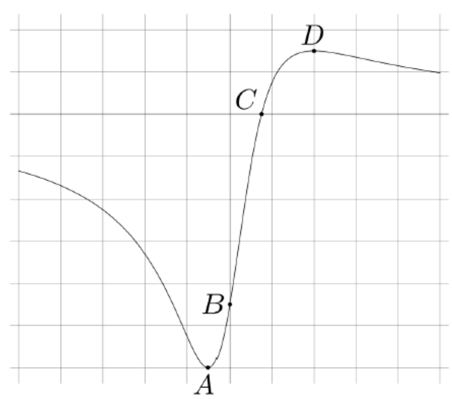
a) Déterminez les zéros de f ainsi que les coordonnées des points à tangente horizontale.

b) Établir une équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse π.

Exercice 78.

Voici le graphe de la fonction

$$f : x \longmapsto y = \frac{3(4x-3)}{2(x^2+1)}.$$



a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Donnez les équations des éventuelles asymptotes du graphe de f.

c) Calculez les coordonnées (valeurs exactes !) des points A, B, C et D.

d) Faîtes le tableau de croissance de f.

e) Sous quel angle le graphe de f coupe-t-il Oy ?

Exercice 79. *Étudiez les fonctions suivantes :*

a) $y = \dfrac{2x-5}{2x+3}$ *b)* $y = \dfrac{1}{8}(x+1)^3(x-3)$ *c)* $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

d) $y = x\sqrt{1-x}$ **e)* $y = \sin(x) - 2\cos(x)$ *f)* $y = -\dfrac{(x-2)^2}{4(x+1)}$

g) $y = \dfrac{x^2-3x}{2x+2}$ *h)* $y = -\dfrac{1}{10}x(x^2-5)^2$ *i)* $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

***Exercice 80.** *Même exercice :*

a) $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 7$ *b)* $y = x^2 + \dfrac{54}{x}$ *c)* $y = \sqrt{9-x^2}$

d) $y = \dfrac{-3x^2+12}{(x+1)^2}$ *e)* $y = \dfrac{x^2-16}{2x+10}$ *f)* $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

g) $y = \dfrac{4x+12}{(x+2)^2}$ *h)* $y = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$ *i)* $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}$

j) $y = \dfrac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$ *k)* $y = -3 + \sqrt{-x^2+8x+9}$ *l)* $y = \sqrt{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

Exercice 81. *Étudiez, sur l'intervalle* $[0; 2\pi]$ *:*

$$f(x) = 3\sin(x) + 4\cos(x) \qquad et \qquad g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Exercice 82. *Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans le cercle trigonométrique ?*

Exercice 83. *Minimisez le périmètre d'un rectangle dont l'aire vaut* $1m^2$.

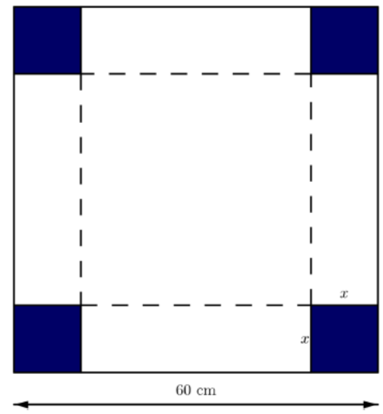
***Exercice 84.** *Quelle est la plus grande valeur possible de l'expression* $\cos(x) + \sin(x)$ *?*

Exercice 85. *Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carré sans couvercle, dont la contenance est d'un litre, pour que sa construction demande un minimum de matériau ?*

Exercice 86.

Nous construisons une boîte parallélipipédique sans couvercle à partir d'un carton carré de 60cm de côté. Nous avons coupé dans chaque coin un carré de côté x afin de pouvoir relever les bords.

Quelle doit être cette mesure x pour que le volume de la boîte soit maximal ?



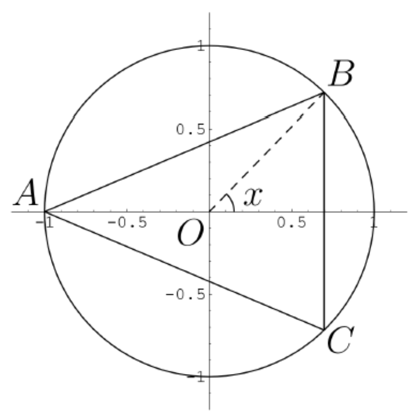
Exercice 87. *Trouvez deux nombres positifs dont la somme vaut 10, de façon que le produit du carré de l'un par le cube de l'autre soit maximal.*

Exercice 88. *Quelle est la plus petite différence d'ordonnée entre les paraboles*

$$\mathcal{P}_1 : y = -x^2 + 3x - 5 \text{ et } \mathcal{P}_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10 \text{ ?}$$

Exercice 89.

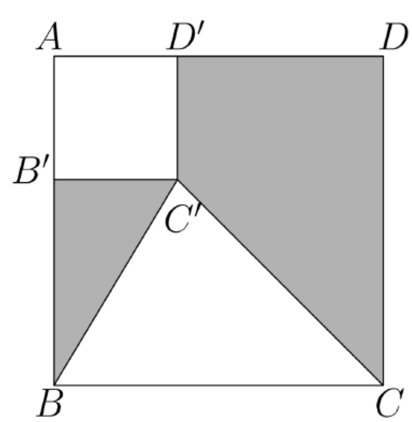
Trouvez l'aire maximale du triangle ABC dessiné ci-dessous.



Exercice 90.

La figure $ABCD$ est un carré de 8 cm de côté et $AB'C'D'$ est un carré de côté x. Soit $\sigma(x)$ l'aire de la partie grisée.

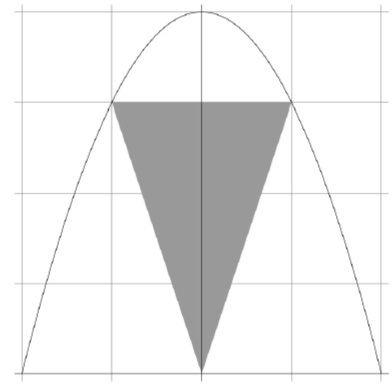
Donnez l'expression fonctionnelle de $\sigma(x)$, puis déterminez x pour que l'aire grisée soit maximale. Que vaut cette aire maximale ?



Exercice 91.

Considérons les triangles ayant un sommet à l'origine et un côté horizontal dont les extrémités se trouvent sur la partie positive de la parabole $y = 4 - x^2$*.*

Trouvez la hauteur du triangle dont l'aire est maximale et indiquer cette aire maximale.

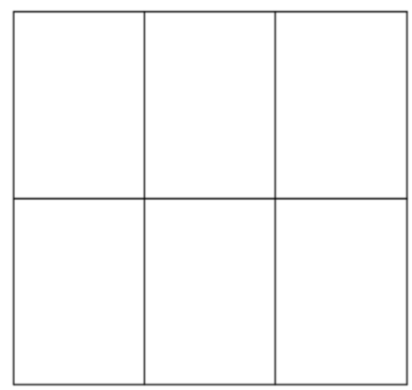


Exercice 92. *Nous disposons de barrières d'une longueur totale de* $100m$ *pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?*

* **Exercice 93.**

Nous disposons de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-dessous.

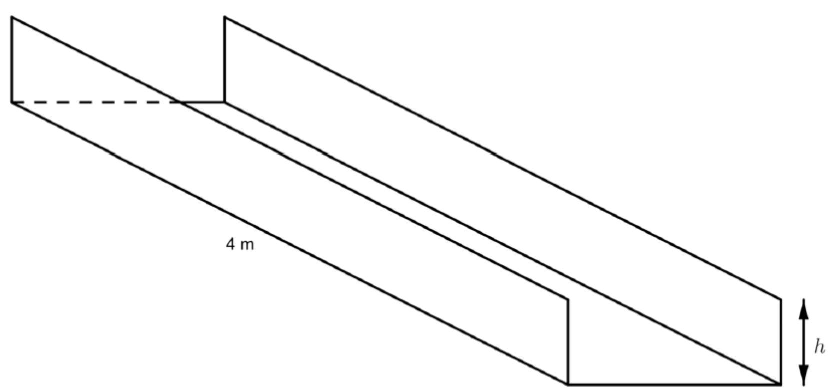
Quelles dimensions faut-il donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?



* **Exercice 94.**

Une plaque de métal rectangulaire longue de 4m et large de 40cm est pliée de manière à créer une gouttière en forme de parallélépipède rectangle.

Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière pour qu'elle ait un volume maximal ?

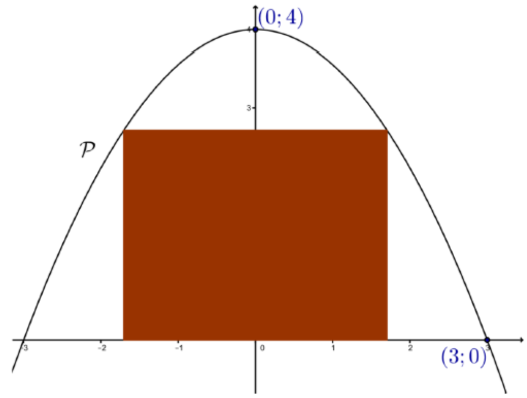


Exercice 97. *Une société fabrique des canettes cylindriques destinées à contenir différentes boissons d'une quantité de 500 ml. Le couvercle revient à 5 centimes par centimètre carré et le métal restant à 3 centimes par centimètre carré. Déterminez les dimensions de la canette qui rendent le coût de fabrication minimal.*

Exercice 98.

Soit la parabole $\mathcal{P}$ de sommet $(0;4)$ et passant par le point $(3;0)$. Le rectangle ci-dessous a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?



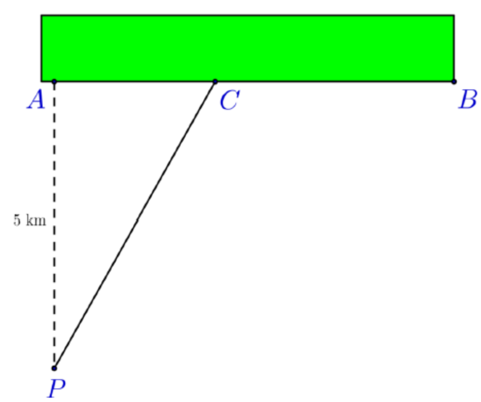
Exercice 99. *Considèrons une famille de droites de pentes négatives passant toutes par le point $(3;2)$. Pour quelle droite de cette famille, le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ?*

* **Exercice 100.** *L'intérieur d'un réservoir sans couvercle, dont le fond a la forme d'un carré, doit être recouvert d'un produit imperméable. La capacité du réservoir est de 32 litres. Déterminez les dimensions du réservoir qui rendent minimale la quantité de produit à utiliser.*

Exercice 101.

Un homme se trouvant dans une barque au point P situé à 5 km du point A le plus proche du rivage souhaite atteindre B, à 6 km de A, le long du rivage, et ceci le plus rapidement.

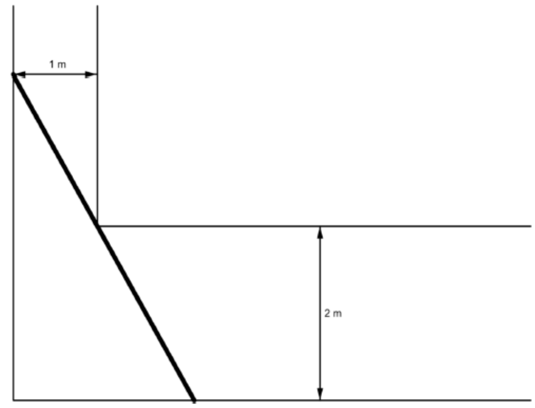
A quel endroit devra-t-il accoster s'il rame à 2 km/h et marche à 5 km/h ?



Exercice 102.

Deux couloirs de respectivement un et deux mètres de largeur, se rencontrent à angle droit. Une barre rigide est transportée parallèlement au sol.

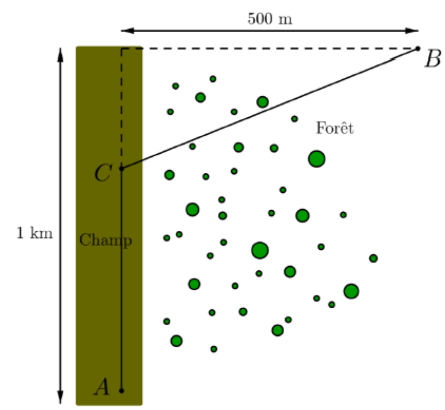
Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si nous voulons pouvoir la transporter d'un couloir à l'autre ?



***Exercice 103.**

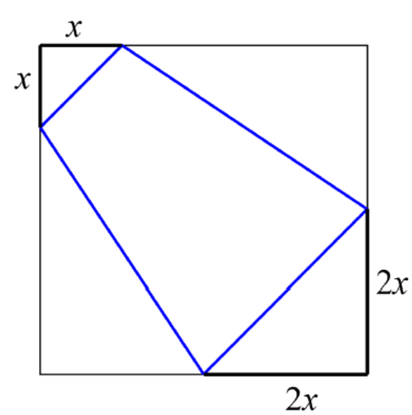
Nous construisons un chemin conduisant d'une maison A, située en lisière de forêt, à une cabane de bûcherons B à l'intérieur d'une forêt, comme l'indique la figure ci-dessous. En lisière de forêt, le mètre courant de chemin revient à 300 francs alors qu'en forêt un mètre coûte 500 francs.

Déterminez en quel point C il s'agit de bifurquer dans la forêt pour obtenir un tracé aux moindres coûts.



***Exercice 104.**

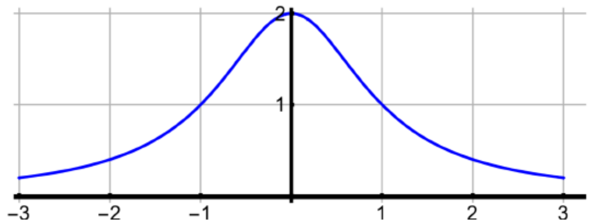
Trouvez l'aire maximale d'un trapèze inscrit comme ci-contre dans un carré dont les côtés mesurent 12cm.



***Exercice 105.** *Soit la fonction* $f(x) = \sin(2x)$ *avec* $x \in [0; \pi]$.

Trouvez les points du graphe de f en lesquels la pente de la tangente au graphe est maximale, ainsi que les points où la pente est minimale. Calculez la valeur de ces pentes puis esquissez le graphe de la fonction.

Exercice 106. *Le graphe de la fonction* $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ *est représenté ci-dessous.*



Trouvez les points du graphe à distance minimale de l'origine et calculez cette distance.