

LDDR – Niveau 1 : Calcul Algébrique

1 Calculer sans machine

a) $3 \cdot (3 + 4) - 2 \cdot (6 - 3) = \dots$ b) $150 - (100 + 50) \div 5 = \dots$
 c) $20 - (3 + (10 - 7) \cdot 3) = \dots$ d) $-3 \cdot (-5) + (-2) = \dots$
 e) $2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = \dots$ f) $-6 + 4 \div (-2) + 2 = \dots$
 g) $(-6 + 3 \cdot 2) \div (7 + 2 \cdot (-2)) = \dots$ h) $3 - (-2) - (-1) \cdot (-4) = \dots$
 i) $((-1 - (-2)) \div (-1)) \cdot (-2) = \dots$ j) $(100 - (50 - (40 - 9))) \cdot 2 = \dots$

2 Utiliser les quatre opérateurs arithmétiques ($+, -, \cdot, \div$) et les parenthèses (uniquement si nécessaire) afin que les égalités suivantes soient vérifiées.

a) $3 \quad 7 \quad 3 \quad 7 = 37$ b) $3 \quad 7 \quad 3 \quad 7 = 14$ c) $3 \quad 7 \quad 3 \quad 7 = -5$

3 Calculer les expressions suivantes pour $x = 2$ et $x = -3$.

$$A(x) = ((x+5)x+3)x-8 \quad B(x) = [(x+5)x+3](x-8)x+3$$

$$C(x) = x(1-x[1-x(1-x)]) \quad D(x) = (4-[5-(6+x)x]x)x$$

4 Donner le résultat des opérations suivantes sous forme de fraction.

$$A = \frac{5}{8} + \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6} \right) \right) \quad B = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$C = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3} \right) \div \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4} \right) \quad D = \left(\frac{3}{8} \div \frac{1}{4} \right) + \frac{2}{7} \div \frac{5}{3}$$

5 Effectuer et simplifier au maximum.

$$A = \frac{x-3}{10} \cdot \frac{15}{x-3}$$

$$B = \frac{4x+4y}{x+2} \div \frac{2}{x}$$

$$C = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2}$$

$$D = -\frac{2b^4}{5} \div \frac{b^2}{20}$$

$$E = \frac{x-3}{x+1} \div \frac{x-2}{x+1}$$

$$F = (2x+2y) \cdot \frac{7}{x+y}$$

$$G = \frac{4}{5x} + \frac{1}{x}$$

$$H = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{6}$$

$$I = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$J = \frac{1}{3a} - \frac{1}{4a}$$

$$K = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3}$$

$$L = \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b}$$

$$M = \left(2 + \frac{1}{a}\right) \Big/ \left(1 + \frac{2}{a}\right) \quad N = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Big/ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad O = \left(\frac{3}{x} - \frac{8}{x}\right) \Big/ \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)$$

6 Trouver des expressions équivalentes sans parenthèses.

$$A = (3a + 2b)(2a + 3b)$$

$$B = (5x + 4)(9 - 11x)$$

$$C = (x - 5y + 1)(3x - 2)$$

$$D = a - (b + c - (d + e))$$

$$E = a - (b - (c + d - e))$$

$$F = 5x - 8y - (3x - 2y)$$

7 Développer les expressions suivantes avec des identités remarquables.

$$A = (3x + 2y)^2$$

$$B = (3x - y)(3x + y)$$

$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$$

$$D = 3(x + y)^2$$

$$E = [3(x + y)]^2$$

$$F = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$G = (4x - \sqrt{6}y)^2$$

$$H = (a + b + c)(a + b - c)$$

8 Compléter les égalités suivantes.

a) $4x^2 + \dots + \dots = (\dots + 5)^2$

b) $\dots + 14x + \dots = (x + \dots)^2$

c) $x^2 - \dots + 100 = (\dots - \dots)^2$

d) $(3x + \dots)^2 = \dots + \dots + 25$

e) $64 + \dots + 9x^4 = (\dots + \dots)^2$

f) $\dots - 12x + 4 = (\dots - \dots)^2$

g) $x^2 - 16 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

h) $(2x - \dots)^2 = \dots - 24x + \dots$

9 Simplifier l'expression $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ puis calculer de tête $10'001^2 - 9'999^2$.

10 Ecrire sous forme de produits les expressions suivantes et déduire des valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent.

$$A(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$B(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$C(x) = x^2 - 121$$

$$D(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$E(x) = 16x^4 - 1$$

$$F(x) = 9x^2 + 12x + 4$$

$$G(x) = 2x^3 - 18x$$

$$H(x) = (2x + 1)(x - 2) + x(2x + 1)$$

$$I(x) = (x^2 + 1)(x - 5) + 2x(x - 5)$$

$$J(x) = (x^2 - 5)(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$$

11 Calculer la somme, la différence et le produit des polynômes suivants

a) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ et $Q(x) = 2x^2 + 5x^3 + 2x^4 - 3$

b) $P(x) = 4x^2 + 3^2x - 2^3$ et $Q(x) = 3x^4 + 2x^2 + 3x^3 - 3x^4 - 2$

12 Chercher parmi les diviseurs de leur terme constant respectif tous les zéros entiers des polynômes $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ et $Q(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9$.

13 Trouver les solutions des équations polynomiales suivantes

a) $18 - 4x = 9$

b) $600x - 700 = 200x + 500$

c) $2,4x - 1,8 = 3(x - 1,2)$

d) $\frac{x - 12}{5} = \frac{2x - 6}{13}$

e) $x^2 + 12x - 8 = x^2 - 7x + 5$

f) $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$

g) $0,3(3 + 2x) = 4(0,8 - 0,3x)$

h) $\frac{1 - x}{4} - \frac{2x + 3}{3} = \frac{x}{2}$

14 Compléter les égalités suivantes avec des nombres et déduire les valeurs de x pour lesquelles l'expression considérée s'annule.

$$A(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - \dots)^2 - \dots + 3 = (x - \dots)^2 + \dots$$

$$B(x) = x^2 - 3x - \frac{7}{4} = (x - \dots)^2 - \dots - \frac{7}{4} = (x - \dots)^2 - \dots$$

$$C(x) = 2x^2 + 8x + 6 = 2(x + \dots)^2 - \dots + 6 = 2(x + \dots)^2 - \dots$$

$$D(x) = 3x^2 - 6x - 5 = 3(x - \dots)^2 - \dots - 5 = 3(x - \dots)^2 - \dots$$

15 Résoudre les équations suivantes par une méthode appropriée.

a) $x^2 - 144 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) $10 - 7x + x^2 = 0$

d) $2x^2 - 3x = -4$

e) $8x - x^2 = 11$

f) $(x + 3)(x + 1) = 1$

16 Démontrer les trois relations encadrées ci-dessus puis factoriser les polynômes

$$P_1(x) = x^2 + x - 6, \quad P_2(x) = 2x^2 + 9x + 4, \quad P_3(x) = 5x^2 + 13x - 6$$

17 Calculer le rayon du cercle dont l'aire est multipliée par deux lorsque son diamètre augmente de 2 centimètres.

18 Déterminer les dimensions du rectangle dont a) le périmètre vaut 121m et l'aire vaut 420m² b) le périmètre vaut 94m et la diagonale mesure 37m.

19 Résoudre les équations "bicarrées" suivantes en utilisant $y = x^2$ pour inconnue.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $2x^4 + x^2 - 21 = 0$ c) $4x^4 + x^2 - 3 = 0$

20 Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{5x}{x^2 + 9} = -1$ b) $\frac{x - 2}{2x - 3} = \frac{x + 1}{3x + 2}$ c) $\frac{5x}{x - 3} + \frac{4}{x + 3} = \frac{90}{x^2 - 9}$

21 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes

a) $3x^2 + 2x + 5 : x + 3$ b) $x^3 - 2x^2 + 3x + 4 : x + 2$
 c) $x^4 + 2x^3 - 1 : x^2 - 1$ d) $7x^4 - 3x^2 + 2x - 4 : x^2 - 4$
 e) $x^6 - 3x^5 + 2 : x^3 + 3x$ f) $2x^3 - 11x^2 + 23x - 26 : 2x - 5$

22 Sans effectuer de division, dire si le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$ est divisible par a) $x - 3$ b) $x + 1$ c) $x - 2$.

23 Trouver la valeur de m pour que $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 3x - 2$ soit divisible par $x + 2$. Ce polynôme est-il également divisible par $x + 1$?

24 Diviser $P_1(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ par $x + 2$ et par $x - 3$ avec la méthode de Horner. Faire de même avec le polynôme $P_2(x) = 3x^3 - 6x + 2$.

25 Diviser $P(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7x + 3$ par $x - 1$ et le quotient obtenu par $x + 1$. En déduire le quotient et le reste obtenus si on divisait $P(x)$ par $(x - 1)(x + 1)$.

26 Etablir la liste de tous les nombres rationnels susceptibles d'annuler le polynôme $P_a(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x + 4$ lorsque $a = 3$, $a = 2$ puis $a = 3/2$.

27 Vérifier que la factorisation suivante est complète et indiquer les racines avec leur multiplicité : $P(x) = 2(x + 1)^3(3x - 5)^2(2x + 3)(x^2 - 3x + 5)(2x^2 + 2x + 1)$.

28 Factoriser complètement les polynômes suivants : $P_1(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6$, $P_2(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 16x - 8$ et $P_3(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 12$.

29 Simplifier les expressions suivantes

$$\begin{array}{llll}
 a^4 \cdot a^{28} = \dots & x^{-25} \cdot x^{14} = \dots & u^{n-1} \cdot u^{6-n} = \dots & b^{4n-7} \cdot b^{-n+7} = \dots \\
 \frac{h^4}{h^2} = \dots & \frac{n^0}{n^{-5}} = \dots & \frac{z^5}{z^{3-6n}} = \dots & \frac{e^x}{e^{-x}} = \dots \\
 (-a)^5 = \dots & (-x^6)^4 = \dots & (a^5b^{-8}x)^4 = \dots & (-3x^4)^3 = \dots \\
 (x^{-3}y^5)^3 = \dots & (ab^0c^{-3})^{-n} = \dots & \frac{(-a)^6}{(-a)^3} = \dots & \frac{(-a)^{4n+3}}{(-a^n)^4} = \dots
 \end{array}$$

30 Décomposer en facteurs premiers et simplifier

$$A = \frac{6^5 \cdot 14^4 \cdot 15^3}{10^2 \cdot 12^3 \cdot 21^4} \quad B = \frac{9^6 \cdot 25^3 \cdot 8^5}{24^3 \cdot 75^4 \cdot 36^2} \quad C = \frac{12^4 \cdot 35^2 \cdot 200^3}{225^3 \cdot 16^4 \cdot 28^2}$$

31 Simplifier les fractions suivantes

$$A = \left(\frac{a^5}{b^6} \right)^{-4} \left(\frac{a^4 b^{-4}}{c^7} \right)^3 \quad B = \left(\frac{x^3}{y^4} \right)^6 \left(\frac{x^2 z^{-2}}{y^{-1}} \right)^{-3} \quad C = \frac{(x^4 y^3)^n}{(x^2 y^4)^{2n-1}}$$

$$D = \frac{(a^{n-1} b^n)^2}{(a^2 b^2)^{n-1}} \quad E = \frac{a^{-2} b^{-10}}{a^7 b^{-8}} \cdot \frac{a^4 b^{-3}}{(a^{-3} b)^{-2}} \quad F = \frac{(16x^4 y^2)^n}{(4x^2 y)^{2n-1}}$$

32 Extraire les carrés parfaits sous les racines suivantes

$$\sqrt{12}, \quad \sqrt{27}, \quad \sqrt{72}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{75}, \quad \sqrt{90}, \quad \sqrt{147}, \quad \sqrt{800}, \quad \sqrt{216}$$

33 Donner des fractions équivalentes avec dénominateurs entiers

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{7}{\sqrt{7}}, \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \quad \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, \quad \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{15}}, \quad \frac{3\sqrt{20} - 5\sqrt{15}}{\sqrt{5}}, \quad \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

34 Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}, \quad B = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}, \quad C = \frac{7+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} - \frac{7-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

35 Rendre entier le dénominateur des fractions suivantes et simplifier

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}, \quad B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad C = \frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

36 Calculer en élevant au carré puis en prenant la racine

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}, \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}, \quad \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

37 Résoudre les équations irrationnelles suivantes

$$\text{a)} \quad 2x + \sqrt{x(x+6)} = 8 \quad \text{b)} \quad \sqrt{2+x} + 4 = \sqrt{10-3x}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \quad \text{d)} \quad \sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x+18}$$