# LDDR – Niveau 2 : TE 17 – Algebre Lineaire

3Mg06 **Algèbre linéaire** **28.04.2017**

***Tous les calculs, présentés avec soin, doivent figurer sur les feuilles de solutions.***
***Tous les résultats seront justifiés, soit par calcul, soit par un commentaire.***

## Exercice 1

Relativement à une base $(\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2)$ une application linéaire $f$ est donnée par la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

**a)** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $a$ l'application $f$ n'est pas inversible ?
**b)** On pose $a = 2$.
**c)** Calculer les valeurs et les vecteurs propres de $f$.
**d)** Interpréter géométriquement l'application $f$.
**e)** Trouver l'image par $f$ d'une droite d'équation $d:\ x + 3y - 6 = 0$.
*Avant de faire les calculs, réfléchissez :*
*Les images de deux vecteurs perpendiculaires sont-ils perpendiculaires ?*

## Exercice 2

Relativement à une base orthonormée de l'espace, on considère une application linéaire $f$ donnée par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$ $a$ et $b$ désignant des constantes.

**1)** Montrer que $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $f$ et donner la valeur propre correspondante.

**2)** Soit $S$ le sous-espace des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

**a)** Choisir dans $S$ deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{s}$ et $\vec{t}$.
**b)** Calculer leur image $f(\vec{s})$ et $f(\vec{t})$.
**c)** Montrer que $S$ est globalement invariant par $f$.

**Tourner la feuille !**

**Exercice 3**

Dans $V_3$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ainsi que l'application linéaire $f$ donnée par la matrice $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- **a)** Déterminer les images par $f$ des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.
- **b)** Donner les valeurs et les vecteurs propres de $f$.
- **c)** Donner la matrice $F'$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
- **d)** Interpréter géométriquement l'application linéaire $f$.
- **e)** Décrire avec précision l'image par $f$ de la sphère unité $s: x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Exercice 4**

Dans l'espace muni d'une base standard, une transformation orthogonale $f$ est donnée par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $A$ est-elle orthogonale ?

**b)** On pose $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi $G$ décrit une rotation. Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation.

**Bon travail !**

**Owocnej pracy !**