

LDDR – Niveau 2 : TE 16 – Algèbre Linéaire - Solutions

Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 2

3MG

ALGÈBRE LINÉAIRE

SOLUTIONS A

Exercice 1

$$M = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) $f(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow 16x + 12y = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 0$, donc $\ker(f)$ est la droite vectorielle

$$\text{d'équation } 4x + 3y = 0 \text{ ou bien } \ker(f) = \left\{ \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\dim(\text{Im}(f)) = 1$, $f(\vec{u}_1) // f(\vec{u}_2) // \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\text{Im}(f)$ est la droite vectorielle

$$\text{d'équation } 3x - 4y = 0 \text{ ou bien } \text{Im}(f) = \left\{ \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

c) $f(\vec{v}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 12y = 25x \\ 12x + 9y = 25y \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$, donc l'ensemble des vecteurs

invariants est $\text{Im}(f)$

d) En remarquant que $\ker(f) \perp \text{Im}(f)$, on déduit que f est une projection orthogonale sur la droite vectorielle $3x - 4y = 0$

Exercice 2

$$F = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$

a) $\det(F) = -56 + 50 = -6$, $\det(F) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est injective ou régulière.

b) $\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 5 \\ -10 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$, $\det(F - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -10x + 5y = 0, \text{ donc } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda_1 = 2$$

$$f(\vec{v}) = -3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0, \text{ donc } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda_2 = -3$$

$$c) M_p = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, M_c = F \cdot F = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$\vec{c} = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2, f(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{v}$$

a) $f(\vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{c} = 10 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{c} = 7 \cdot \vec{c} \Rightarrow \lambda = 7$

b) Si $\vec{n} \perp \vec{c}$, $\vec{n} \cdot \vec{c} = 0$ et $f(\vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{n} = -3 \cdot \vec{n} \Rightarrow \lambda = -3$

c) $f(\vec{u}_1) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{u}_1 = -2 \cdot \vec{u}_1 - 3 \cdot \vec{u}_2$

$$f(\vec{u}_2) = (\vec{u}_2 \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{u}_2 = -3 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{u}_2 = -3 \cdot \vec{u}_1 + 6 \cdot \vec{u}_2, F = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$