LDDR – Niveau 2 : TE 15 – Algebre Lineaire

Exercice 1

$$F=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix},\ P(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2$$

a) $P(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2=\lambda^2(6-\lambda)$

$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x+2y-z=0$, plan propre

$\lambda_3=6,\ \begin{pmatrix}-5&2&-1\\2&-2&-2\\-1&-2&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x+2y-z=0\\2x-2y-2z=0\\-x-2y-5z=0\end{cases}$ d'où $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ (droite)

$\vec{v}_3$ est orthogonal au plan propre, on peut prendre $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2=\vec{v}_1\times\vec{v}_3$,

$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$. Dans la base $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$, on a $F_p=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

b) Il s'agit d'une projection orthogonale sur la droite parallèle à $\vec{v}_3$ composée avec une homothétie de facteur 6.

c) $G=\frac{1}{3}F-I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$,

$G\cdot{}^tG=I$, donc G est orthogonale.

d) $\det(G)=1$, il s'agit donc d'une rotation, l'axe est parallèle au vecteur 1-propre,

$G\cdot\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x+2y-z=0\\2x-2y-2z=0\\-x-2y-5z=0\end{cases}$, d'où $\vec{v}=\vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, c'est $\vec{v}_3$ de la question a),

car $G\cdot\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{3}F\cdot\vec{v}-I\cdot\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{3}F\cdot\vec{v}=2\vec{v}\Leftrightarrow F\cdot\vec{v}=6\vec{v}$

Avec $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\cdot\vec{v}_1=-\vec{v}_1$, donc l'angle de la rotation est de $180°$.

e) On a $-G\cdot\vec{v}_1=\vec{v}_1$, $-G\cdot\vec{v}_2=\vec{v}_2$ et $-G\cdot\vec{v}_3=-\vec{v}_3$, il s'agit d'une symétrie planaire par rapport au plan $x+2y-z=0$.