# Correction - Travail Ecrit - Calcul intégral

**Ne pas passer plus de 20 minutes sur la première page !**

**Exercice 1.** Calculer $\int \frac{2}{3x-2}dx = 2\int \frac{1}{3x-2}dx = \frac{2\ln(3x-2)}{3} + c$

**Exercice 2.** Calculer $\int (5x-4)^4 dx = \frac{(5x-4)^5}{25} + c$

**Exercice 3.** Décomposer la fonction rationnelle suivante $f(x) = \frac{1-4x}{x}$ en une somme et utiliser ce résultat pour trouver la primitive $F(x)$ de $f(x)$ qui vérifie $F(2) = ln(2)$.

$$f(x) = \frac{1-4x}{x} = \frac{1}{x} - 4$$
$$F(x) = \ln(x) - 4x + c$$
$$F(2) = \ln(2) - 8 + c = \ln(2)$$

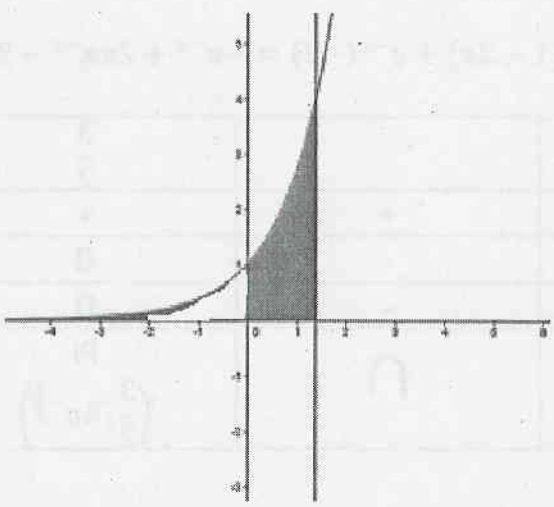
Donc c=8

$$F(x) = \ln(x) - 4x + 8$$

**Exercice 4.** Soit la fonction $f(x) = e^x$.

1) Que représente le calcul $\int_0^{\ln(4)} f(x)dx$ ? Faire un schéma.
2) Calculez le.

. $\int_0^{\ln(4)} f(x)dx = [e^x]_0^{\ln(4)} = e^{\ln(4)} - e^0 = 4 - 1 = 3$



**Exercice 5.** On considère la fonction $f(x) = (2x+1)e^{-x}$,

a) Donner le domaine de définition de la fonction f.

$R$

b) Calculer l'intersection avec l'axe des x et l'axe des y de la fonction f.

$\cap\, O_x : y = 0 \quad (2x+1)e^{-x} = 0 \quad 2x+1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

$\cap\, Oy : x = 0 \quad f(0) = 1 \quad (0; 1)$

c) Donner le tableau de signe de la fonction f.

| $x$ | | $-\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $2x+1$ | - | 0 | + |
| $e^{-x}$ | + | + | + |
| $f(x)$ | - | 0 | + |

d) Donner les équations des éventuelles asymptotes. AH : y=0

e) Calculer la dérivée et en déduire le tableau de croissance.

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x}) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(1-2x)$$

| $x$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | + | + | + |
| $(1-2x)$ | + | 0 | - |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f$ | $\nearrow$ | MAX $\left(\frac{1}{2}; 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ | $\searrow$ |

f) Calculer la dérivée seconde et en déduire le tableau de courbure.

$$f''(x) = -e^{-x}(1-2x) + e^{-x}(-2) = -e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x} = e^{-x}(-3+2x)$$

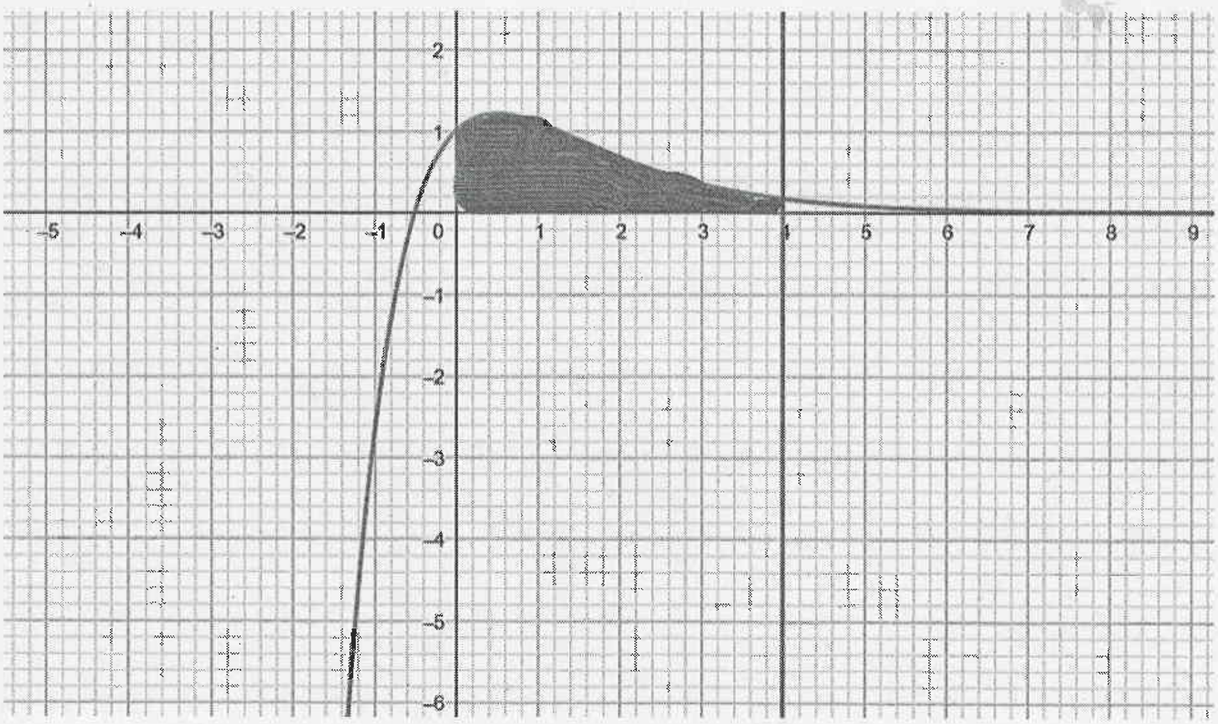
| $x$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | + | + | + |
| $-3+2x$ | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | - | 0 | + |
| $f$ | $\cap$ | Pi $\left(\frac{3}{2}; 4e^{-\frac{3}{2}}\right)$ | $\cup$ |

g) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse x=2.

$$f(2) = 5e^{-2}$$
$$f'(2) = -3e^{-2}$$
$$y = -3e^{-2}\,x + b$$
$$5e^{-2} = -6e^{-2} + b$$
$$b = 11e^{-2}$$

$$y = -3e^{-2}\,x + 11e^{-2}$$

h) Esquisser le schéma de cette fonction sur le repère suivant.




i) Hachurer la surface fermée délimitée par l'axe des x, l'axe des y, la fonction f et la droite d'équation x=4.

j) Calculer cette surface.

Intégration par partie $u' = e^{-x}$ $u = -e^{-x}$ $v = 2x+1$ $v' = 2$

$$\int (2x+1)e^{-x}dx = -e^{-x}(2x+1) - \int -e^{-x}2\,dx = -e^{-x}(2x+1) + 2\int e^{-x}\,dx$$
$$= -e^{-x}(2x+1) - 2e^{-x} = -e^{-x}(2x+3)$$
$$\int_0^4 f(x)dx = F(4) - F(0) = 2.8$$