LDDR – Niveau 1 : Trigonometrie

Exercice 1.

Convertissez les angles suivants de degrés en radians en donnant la réponse en ***fraction du nombre*** π.

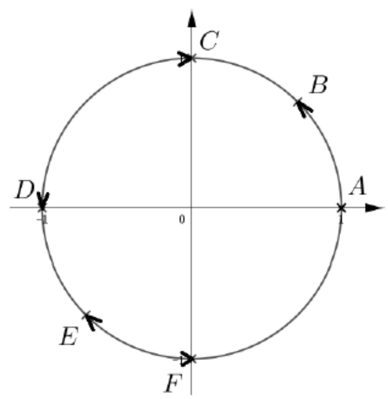
degrés	90°	135°	30°	18°	45°	$22,5^\circ$	720°	270°	2°
radians									

Convertissez les angles suivants de radians en degrés.

radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	6π	$2,5$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$
degrés									

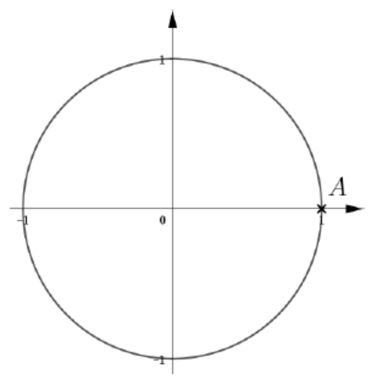
Exercice 2.

a) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminez une mesure des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AE}$ *et* $\overset{\frown}{AF}$ *en fraction de* π.



arc	$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{AC}$	$\overset{\frown}{AD}$	$\overset{\frown}{AE}$	$\overset{\frown}{AF}$
mesure					

b) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, placez les points B, C, D, E et F correspondants à la mesure des arcs ci-dessous :



arc	$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{AC}$	$\overset{\frown}{AD}$	$\overset{\frown}{AE}$	$\overset{\frown}{AF}$
mesure	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$	432557π	$-\frac{15\pi}{2}$

Exercice 3. *Indiquez la détermination géométrique équivalente aux angles suivants.*

angle	510°	4320°	-79°	-3915°	600°	$\frac{21\pi}{4}$	$\frac{20\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	8
dét. géo.										

Exercice 4. ***Sans calculatrice.*** *Remplissez le tableau ci-dessous avec « 0 », « 1 », « − », « + » et « / » (non défini) en fonction des valeurs et signes pris par les fonctions trigonométriques :*

	cosinus	*sinus*	*tangente*
0°			
Quadrant I			
90°			
Quadrant II			
180°			
Quadrant III			
270°			
Quadrant IV			

Exercice 5. ***Sans calculatrice.***

Représentez chacun des angles α ci-dessous dans le cercle trigonométrique (esquisse), placez le point P_α correspondant puis estimez aussi précisèment que possible les valeurs de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
220°			
$1,4$			
$15,75\pi$			

Exercice 6.

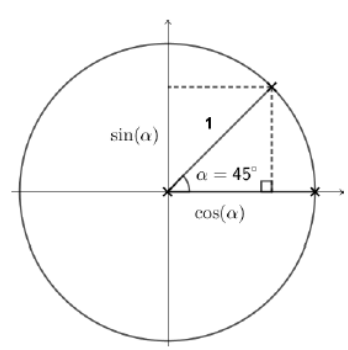
1. *Réalisez trois schémas suffisament grands avec le cercle trigonométrique, un angle α quelconque dans le premier quadran, P_α et T, comme dans le schéma de la définition des fonctions trigonométriques.*

2. *En complétant ces schémas de manière adéquate, observez les formules de symétrie vues précédemment.*

Exercice 7.

Soit $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

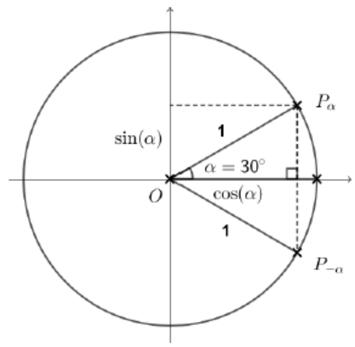
Utilisez Pythagore et l'égalité $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$ pour déterminer ces deux valeurs.



Exercice 8.

Soit $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Remarquez que le triangle $OP_\alpha P_{-\alpha}$ *est équilatéral pour déterminer la valeur de* $\sin(\alpha)$ *puis utilisez Pythagore pour déterminer la valeur de* $\cos(\alpha)$.



Exercice 9. ***Sans calculatrice.***

a) L'angle α *se trouve dans le quatrième quadrant et vérifie* $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$. *Trouvez les valeurs exactes de* $\sin(\alpha)$ *et de* $\tan(\alpha)$.

b) L'angle β *se trouve dans le deuxième quadrant et vérifie* $\tan(\beta) = -4$. *Trouvez les valeurs exactes de* $\sin(\beta)$ *et de* $\cos(\beta)$.

Exercice 10.

a) A partir des deux relations fondamentales, démontrez la troisième relation fréquemment utilisée :

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$$

b) Idem pour $\dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)} = 1 + \cos(x)$.

Exercice 11. *Calculez le produit* $\sqrt{1+\cos(x)} \cdot \sqrt{1-\cos(x)}$.

Exercice 12. *Simplifiez autant que possible :*

1) $\dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$ 2) $\dfrac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$ 3) $\dfrac{1-\big(\sin(x)-\cos(x)\big)^2}{\sin(x)}$

Exercice 13.

a) Représentez, dans le même système d'axes sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$, *les graphes des fonctions ci-dessous.*

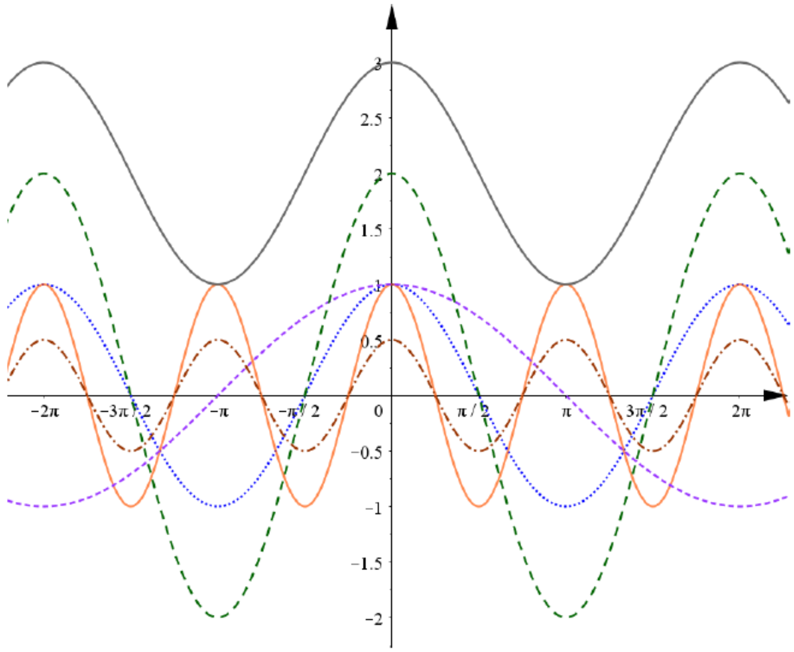
$f_1(x) = \sin(x)$ $f_2(x) = \sin(2x)$ $f_3(x) = 2\sin(x)$ $f_4(x) = |\sin(x)|$

b) Déterminez l'ensemble des images $f(D)$, *la période* P *et la parité de chacune de ces fonctions.*

Exercice 14. *Associez les graphes aux expressions fonctionnelles ci-dessous.*

$f_1(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f_2(x) = \cos(2x)$ $\quad$ $f_3(x) = 2\cos(x)$

$f_4(x) = \cos(x) + 2$ $\quad$ $f_5(x) = \cos(\frac{x}{2})$ $\quad$ $f_6(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$



Exercice 15. *Complétez le tableau suivant.*

fonction	$\cos(x)$	$\cos(2x)$	$\cos(\frac{x}{2})$	$\sin(3x)$	$\sin(\frac{x}{4})$	$\sin(\qquad)$	$\cos(\qquad)$
période						1	2

Exercice 16. ***Sans calculatrice.*** *Déterminez les valeurs suivantes :*

$a)$ $\tan^{-1}(1) = ...$ $\qquad$ $b)$ $\sin^{-1}(-1) = ...$ $\qquad$ $c)$ $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = ...$

Exercice 17. *Résolvez les triangles rectangles suivants (c correspond à l'hypothènuse) :*

a) $c = 4,75$ *et* $\alpha = 65,8^\circ$ b) $a = 112,5$ *et* $\beta = 14,5^\circ$

c) $a = 6$ *et* $c = 12,5$ d) $a = 5cm$ *et aire* $= 6cm^2$

Exercice 18. *Résolvez le triangles ABC isocèle en A, avec* $\alpha = 42,5^\circ$ *et* $a = 23,6$*. Précision :* α *est l'angle correspondant au sommet A, et a est le côté opposé à* α*.*

Exercice 19. *Une personne se tenant debout projette une ombre horizontale de 2,3 mètres de long lorsque les rayons du soleil forment un angle de 38° avec le sol. Calculez la grandeur de la personne.*

Exercice 20. *Quelle est la hauteur d'une tour dont l'ombre sur le sol mesure 36 mètres lorsque le soleil est 37,5° au-dessus de l'horizon ?*

Exercice 21. *Les diagonales d'un losange mesurent 8 et 15 centimètres. Déterminez la valeur des angles du losange.*

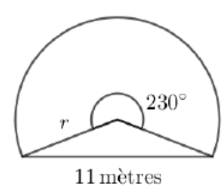
Exercice 22. *Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de 4,5°. Le bas de la route est de 450 mètres d'altitude. A quelle altitude nous trouvons-nous après avoir suivi la route durant 6,4 kilomètres ?*

Exercice 23. *Un bûcheron se trouvant à 60 mètres d'un sequoia observe son sommet sous un angle de 58° avec l'horizontale. Ses yeux sont à 1,7 mètres du sol. Quelle est la hauteur du sequoia ?*

Exercice 24. *Dans un disque de 10 centimètres de rayon, nous prélevons un secteur correspondant à une corde de 6cm. Calculez le périmètre et l'aire de ce secteur.*

Exercice 25.

La voûte d'un tunnel est un arc de cercle dont l'angle au centre mesure 230°. Sachant que la base du tunnel mesure 11 mètres, déterminez le rayon de l'arc de cercle ainsi que la hauteur maximale de la voûte par rapport au sol.



Exercice 26. *L'ombre d'un arbre s'allonge de 20 mètres lorsque l'angle d'élèvation du soleil passe de 31° à 12°. Déterminez la longueur de l'ombre lorsque l'angle d'élèvation du soleil est de 31°. Quelle est la hauteur de l'arbre ?*

Exercice 27. *Pour mesurer la largeur d'une rivière, nous marquons un segment AB sur un bord. Un point C est situé sur l'autre bord, en face de A. Soit β l'angle de sommet B. Sachant que AB mesure 90 mètres et que $\beta = 54°$, déterminez la largeur de la rivière.*

Exercice 28. *Deux observateurs, placés à la même altitude et distants de 1350 mètres, visent au même moment une mongolfière située entre eux. Cette mongolfière est dans le plan vertical contenant les deux observateurs. Les angles d'élévation sont de 65,4° et 76,5°. Quelle est l'altitude de la mongolfière par rapport aux observateurs ?*

Exercice 29. *A une certaine distance, nous visons le sommet d'une tour haute de 32,4 mètres ; l'angle avec l'horizontale mesure 27,14°. Quelle distance sépare l'observateur de la tour si nous savons que l'oeil de celui-ci est placé à 1,6 mètre du sol ?*

Exercice 30. *L'aire d'un polygone régulier à 15 côtés vaut 1800. Déterminez la longueur de son côté, ainsi que le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.*

Exercice 31. *Un observateur, placé à une hauteur de 252 mètres au-dessus du niveau de la mer, a observé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon sensible faisait avec la vertical un angle de 89,49°. Calculez, d'après cette mesure, le rayon terrestre.*

Exercice 32. *Vous venez de plaquer l'ex-amour de votre vie ! Vous l'abandonnez sans remords sur la jetée (altitude de ses yeux humides : 4 mètres) et ramez vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 mètre). A quelle distance du rivage échapperez-vous à son regard déchirant, en disparaissant de son horizon ?*

Exercice 33. *A Syène (près d'Assouan, Égypte), le jour du solstice d'été, à midi, le soleil éclaire complétement le fond d'un puits. A ce moment précis, Eratosthène mesure l'ombre d'un obélisque à Alexandrie : elle vaut $\frac{1}{8}$ de la hauteur du monument. Sachant que les deux villes sont distantes de 788 kilomètres, que vaut le rayon terrestre ?*

Exercice 34.

a) Sur le cercle trigonomètrique, représentez tous les angles tels que :

1) $\cos(x) = 0$	2) $\sin(x) = -1$	3) $\sin(x) = \cos(x)$
4) $\cos(x) = \frac{1}{2}$	5) $\sin(x) = \frac{1}{2}$	6) $\tan(x) = \frac{1}{2}$

b) Donnez toutes les solutions de ces équations trigonométriques en radians.

Exercice 35. *Résolvez les équations trigonométriques suivantes.*

1) $\sin(x) = -0,8$	2) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3) $\tan(x) = -3$
4) $\cos(x) = 0,55$	5) $\cos^2(x) = 0,64$	6) $\sin^3(x) = -0,16$

Exercice 36. *Déterminez toutes les solutions des équations suivantes dans l'intervalle* $[0; 2\pi[$.

1) $\cos(2x) = \frac{1}{3}$	2) $\cos(x) + 1 = 0$	3) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\tan(\frac{x}{3}) = -\sqrt{3}$	5) $\cos(4x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{4}$	6) $2\sin(4x) - 1 = 0$

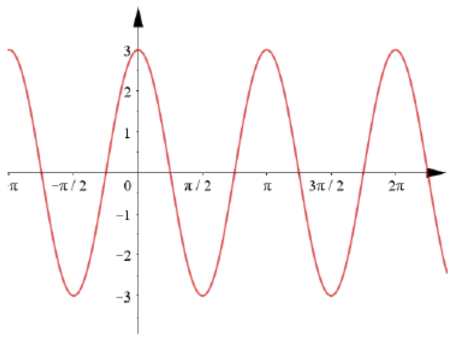
Exercice 37. *Résolvez les équations suivantes.*

1) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(2x)$	2) $\cos(2x) - 2\sin(2x) = 0$	3) $\tan^2(x) + \tan(x) - 6 = 0$
4) $2\cos^2(x) + 1 = 3\cos(x)$	5) $\sin^2(x) = 1 - 2\cos(x)$	6) $\cos^2(x) + 3\sin^2(x) = \frac{3}{2}$
7) $2\sin(3x) = 3\cos(3x)$	8) $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{5}$	9) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

***Exercice 38.** *Idem.*

1) $2\cos(x) = -0,64$	2) $1 - \sin(x) = 1,6$	3) $3\sin^2(x) = \cos^2(x)$
4) $3\cos^2(x) + \sin(x) = 0$	5) $\tan(x) = 2\sin(x)$	6) $\sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
7) $\big(\sin(x) - \cos(x)\big)^2 = \frac{1}{2}$	8) $\sqrt{3}\tan(\frac{x}{3}) = 1$	9) $\sin(x) \cdot \tan(x) = 8$

Exercice 40. *Voici le graphe d'une fonction périodique f.*



a) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble des images de f.

b) Quelle est la période de f ?

c) Quels sont les zéros de f ?

d) Déterminez l'expression fonctionnelle $f(x)$.

Exercice 41. *Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.*

$$f : x \longmapsto y = \frac{1}{\cos(x)} \qquad g : x \longmapsto y = \sqrt{\sin(x)} \qquad h : x \longmapsto y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$$

Exercice 42. *Déterminez l'ensemble des images des fonctions suivantes.*

$$f : x \longmapsto y = \sin^2(x) \qquad g : x \longmapsto y = \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$h : x \longmapsto y = 1 + \cos(x) \qquad i : x \longmapsto y = \frac{1}{\tan^2(x)}$$