LDDR Niveau 1 : TE 7 Geometrie 3D - solutions

LDDR / Maths I — avril 2018 (B)

TE 4 : Géométrie 3D

Nom : ....

points	note

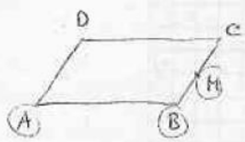
Exercice 1. [~30 minutes, 11 pts]

On considère les points $A(1;2;-3)$ et $B(-8;14;-6)$ ainsi que la droite d : $\begin{cases} x = 1+5\lambda \\ y = -6-4\lambda \\ z = 8-2\lambda \end{cases}$

a) Déterminer le point M d'ordonnée $y = 6$ situé sur la droite d.

$-6-4\lambda = 6, \quad -4\lambda = 12, \quad \lambda = -3$ donc $M(-14;\ 6;\ 14)$

b) Un parallélogramme $ABCD$ est défini par les sommets $A(1;2;-3)$, $B(-8;14;-6)$ et par $M(-14;6;14)$, milieu du côté BC. Trouver les sommets C et D.



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \\ 34 \end{pmatrix}$

donc $C(-20; -2; 34)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -14 \\ 37 \end{pmatrix}$

donc $D(-11; -14; 37)$

c) Trouver une équation cartésienne du plan qui contient les points A, B et M.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -15 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} // \begin{pmatrix} -72 \\ -66 \\ -48 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\pi : 12x + 11y + 8z + d = 0$

$A(1; 2; -3) \in \pi : 12 + 22 - 24 + d = 0, \quad d = -10$

donc $\pi : 12x + 11y + 8z - 10 = 0$

d) Trouver le point I en lequel la droite d coupe le plan $\pi : 3x - y + 2z - 7 = 0$.

$3(1+5\lambda) - (-6-4\lambda) + 2(8-2\lambda) - 7 = 0$

$3 + 15\lambda + 6 + 4\lambda + 16 - 4\lambda - 7 = 0$

$18 + 15\lambda = 0, \quad 18 = -15\lambda, \quad \lambda = \frac{-18}{15} = -1.2, \quad I(-5; -1.2; 10.4)$

e) Déterminer l'éventuel point d'intersection des droites d et d_{AB}. $\quad d_{AB} : \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 2 - 4\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases}$

$(x) : 1 + 3\mu = 1 + 5\lambda$

$(y) : 2 - 4\mu = -6 - 4\lambda$

$(z) : -3 + \mu = 8 - 2\lambda$

$(\times 1) \quad 2 - 4\mu = -6 - 4\lambda$

$(\times 2) \quad -6 + 2\mu = 16 - 4\lambda$

$\ominus \quad 8 - 6\mu = -22$

$-6\mu = -30$

$\mu = 5$

$P(16; -18; 2) \in d_{AB}$

$(\times 1) \quad 2 - 4\mu = -6 - 4\lambda$

$(\times 4) \quad -12 + 4\mu = 32 - 8\lambda$

$\oplus \quad -10 = 26 - 12\lambda$

$-36 = -12\lambda$

$\lambda = 3$

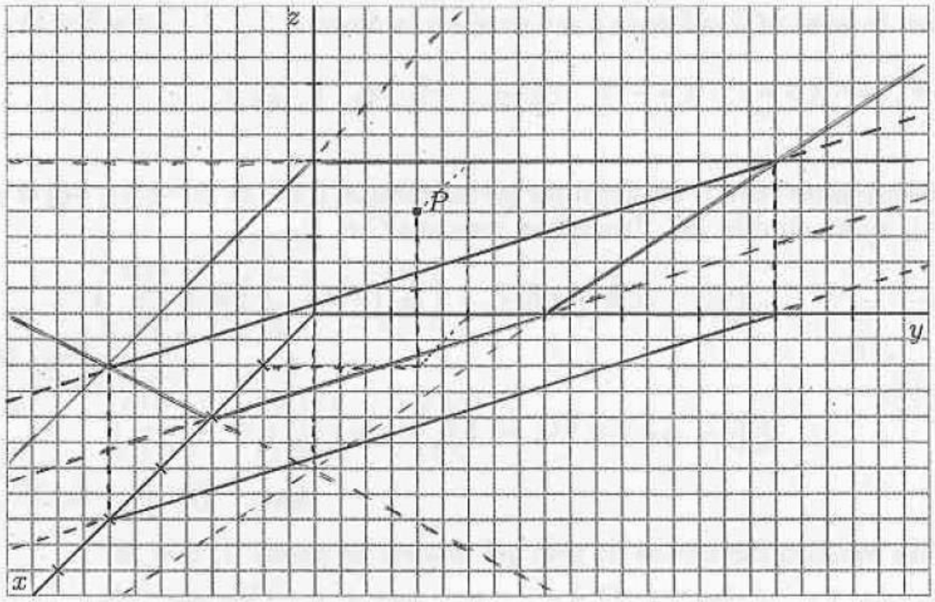
$P(16; -18; 2) \in d$

les droites se coupent en $P(16; -18; 2)$

Exercice 2. [~20 minutes, 7.5 pts]

a) Avec des couleurs différentes, représenter soigneusement

- le plan α qui est parallèle au sol et qui contient le point $P(1; 2; 2)$ (à préciser),
- le plan β qui coupe les axes aux points $I_x(2;0;0)$, $I_y(0;3;0)$ et $I_z(0;0;-2)$,
- la droite d'intersection d des deux plans ci-dessus,
- la droite d_s, projection de d dans le sol.



b) Trouver des équations cartésiennes pour les plans α et β.

$\alpha : z - 2 = 0$ (plan horizontal à hauteur $z = 2$)

$I_x(2, 0, 0)$

$I_y(0, 3, 0)$

$I_z(0, 0, -2)$

ppmc = 6

$\beta : 3x + 2y - 3z - 6 = 0$

c) Trouver les coordonnées du point $A(32; \ldots; \ldots)$ situé sur la droite $d = \alpha \cap \beta$.

$A \in \alpha$ donc $z = 2$, $A(32; y; 2) \in \beta$ donc $96 + 2y - 4 - 6 = 0$

$2y = -86$

$y = -43$

$A(32; -43; 2)$

Exercice 3. [~5 minutes, 1.5 pt]

Trouver les nombres $m \geqslant 0$ et n pour que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 12 \\ n \end{pmatrix}$ soient proportionnels.

$\begin{pmatrix} 3 \\ m \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3m \\ m^2 \\ 2m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 12 \\ n \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3m \\ 36 \\ 3n \end{pmatrix}$

Par comparaison : $m^2 = 36$ donc $m = +6$

$3n = 2m = 12$, donc $n = 4$