

LDDR Niveau 1 : TE 16 Analyse- Calcul Integral-solutions

LDDR / Maths I

décembre 2017 (B)

TE 2 : Analyse II

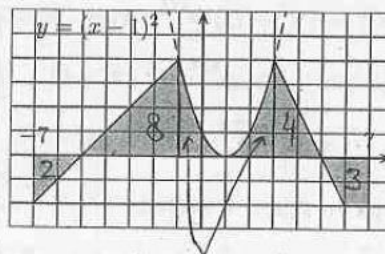
Nom :

points

note

Exercice 1. [~15 minutes, 4 pts]

Une fonction f admet le graphe ci-contre. Calculer l'aire exacte de la surface grise ainsi que $\int_{-7}^7 f(x)dx$.



$$\begin{aligned} \text{Aire} &= 2 + 8 + \frac{16}{3} + 4 + 3 \\ &= 17 + \frac{16}{3} = \frac{67}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-7}^7 f(x)dx &= -2 + 8 + \frac{16}{3} + 4 - 3 \\ &= 7 + \frac{16}{3} = \frac{37}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-1}^3 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} [(x-1)^3]_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{3} (2^3 - (-2)^3) \\ &= \frac{1}{3} (8 - (-8)) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2. [~15 minutes, 6 pts]

Trouver une primitive de $f(x) = \sin(x)e^{3x}$ en intégrant deux fois par parties et une primitive de $g(x) = \cos(x)e^{3x}$ par la méthode d'identification.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin x \cdot e^{3x} dx = -\cos x \cdot e^{3x} + 3 \int \cos x \cdot e^{3x} dx \\ &= -\cos x \cdot e^{3x} + 3 \left(-\sin x \cdot e^{3x} - 3 \int \sin x \cdot e^{3x} dx \right) \end{aligned}$$

$$F(x) = -\cos x \cdot e^{3x} + 3 \sin x \cdot e^{3x} - 9 F(x)$$

$$\text{donc } 10 F(x) = (-\cos x + 3 \sin x) e^{3x}, \quad F(x) = \frac{1}{10} (3 \sin x - \cos x) e^{3x}$$

$$G(x) = (a \sin x + b \cos x) e^{3x}$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= (a \cos x - b \sin x) e^{3x} + (a \sin x + b \cos x) \cdot 3e^{3x} \\ &= ((a+3b) \cos x + (3a-b) \sin x) e^{3x} = g(x) \end{aligned}$$

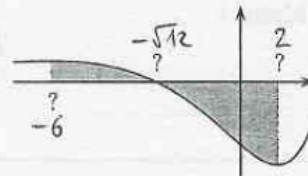
$$\begin{cases} \text{Nb de } \cos x : a+3b=1 & \longrightarrow & a+9a=1, 10a=1 \\ \text{Nb de } \sin x : 3a-b=0, \text{ donc } b=3a & & a=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \left(\frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x \right) e^{3x} \\ &= \frac{1}{10} (\sin x + 3 \cos x) e^{3x} \end{aligned}$$

$$b = 3a = \frac{3}{10}$$

Exercice 3. [~20 minutes, 6.5 pts]

Calculer avec trois décimales l'aire de la surface délimitée par l'axe Ox et la courbe $y = (x^2 - 12)e^{x/2}$ entre ses deux points à tangente horizontale.



• $f(x) = (x^2 - 12)e^{x/2}$ nul lorsque $x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 12$, $x = \pm\sqrt{12} (= \pm 2\sqrt{3})$

• $f'(x) = 2xe^{x/2} + (x^2 - 12) \cdot \frac{1}{2}e^{x/2} = \frac{1}{2}e^{x/2}(4x + x^2 - 12)$

$= \frac{1}{2}e^{x/2}(x^2 + 4x - 12)$ $\Delta(1, 4, -12) = 16 - (-48) = 64$

$f'(x)$ nul lorsque $x = \frac{-4 \pm 8}{2} = < \frac{2}{-6}$

• $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x/2}$

$F'(x) = (2ax + b)e^{x/2} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{2}e^{x/2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nb de } x^2 : \frac{1}{2}a = 1 \text{ donc } a = 2 \\ \text{Nb de } x : 2a + \frac{1}{2}b = 0, 4 + \frac{1}{2}b = 0, \frac{1}{2}b = -4, b = -8 \\ \text{Constante : } b + \frac{1}{2}c = -12, -8 + \frac{1}{2}c = -12, \frac{1}{2}c = -4, c = -8 \end{array} \right.$

$F(x) = (2x^2 - 8x - 8)e^{x/2} = 2(x^2 - 4x - 4)e^{x/2}$

• $F(-6) = 112e^{-3}$, $F(-\sqrt{12}) = (16 + 8\sqrt{12})e^{-\sqrt{3}}$, $F(2) = -16e$

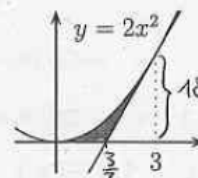
Aire $= [F(x)]_{-6}^{-\sqrt{12}} - [F(x)]_{-\sqrt{12}}^2 = F(-\sqrt{12}) - F(-6) - (F(2) - F(-\sqrt{12}))$

$= 2F(-\sqrt{12}) - F(-6) - F(2) = (32 + 16\sqrt{12})e^{-\sqrt{3}} - 112e^{-3} + 16e$

$\approx 15.467 - 5.576 + 43.493 = 53.384$

Exercice 4. [~10 minutes, 3.5 pts]

Calculer l'aire exacte de la surface délimitée par l'axe Ox , la parabole $y = 2x^2$ et sa tangente au point d'abscisse 3.



$f(x) = 2x^2$, $f'(x) = 4x$, $f(3) = 18$, $f'(3) = 12$

tangente t : $y = 18 + 12(x - 3)$, $y = 12x - 18$

$t \cap Ox$: $12x = 18$, $x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Aire $= \int_0^3 2x^2 dx - \frac{1}{2}(3 - \frac{3}{2}) \cdot 18 = \frac{2}{3}[x^3]_0^3 - 13.5$

$= 18 - \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$