

LJP: TE 21 Calcul Integral- Solutions

Lycée Jean-Piaget ESCN

Mathématiques

Nom :

Prénom :

3M5

TE n. 5

tot. /45

Rédigez ce travail au stylo. La calculatrice est autorisée. Les détails de vos calculs sont exigés.
Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

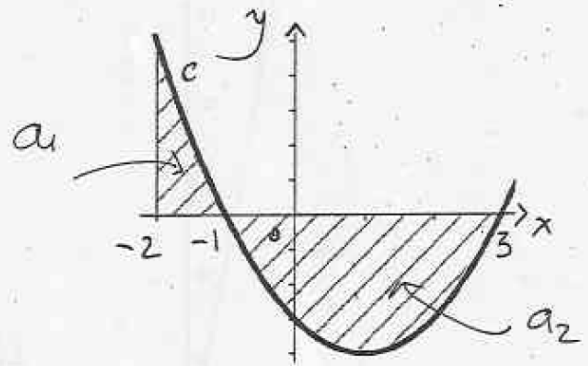
Exercice 1 (10 points)

On donne la fonction C d'équation :

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1x - \frac{3}{2}$$

et son graphe (ci-contre et **pas à l'échelle**).

Calculez l'aire exacte de la surface hachurée.



$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A_{\text{tot}} = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^3 f(x) dx =$$

$$= F(-1) - F(-2) - F(3) + F(-1) =$$

$$= 2F(-1) - F(-2) - F(3).$$

Calcul de $F(x)$:

$$f(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + k ; k \in \mathbb{R}$$

mit $k=0$

$$A_{\text{tot}} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{8}{6} - \frac{4}{2} + 3 \right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{1}{3} + \frac{9}{2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{9}{2} = \frac{4+9}{2} = \frac{13}{2}$$

Exercise 2

I.

$$A(1; 0)$$

$$f(1) = 4 \cdot \log 1 = 4 \cdot 0 = 0$$

$$p(1) = \frac{4}{9} - \frac{40}{9} + 4 = \frac{4-40+36}{9} = 0$$

$$B(10; 4)$$

$$f(10) = 4 \cdot \log 10 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$p(10) = \frac{4}{9} \cdot 100 - \frac{40}{9} \cdot 10 + 4 = 4$$

II.

$$\begin{aligned} a_3 &= \int_1^{10} (f(x) - p(x)) dx = \int_1^{10} \left(4 \log x - \frac{4}{9} x^2 + \frac{40}{9} x - 4 \right) dx = \\ &= \left[\frac{4}{\ln 10} (x \ln x - x) - \frac{4}{27} x^3 + \frac{20}{9} x^2 - 4x \right]_1^{10} = \\ &= \frac{4}{\ln 10} 10 \ln 10 - \frac{40}{27} - \frac{4000}{27} + \frac{2000}{9} - 40 + \frac{4}{\ln 10} + \frac{4}{27} - \frac{20}{9} + 4 \\ &= -\frac{39}{\ln 10} + \frac{6000 - 4000 + 4 - 60 + 108}{27} = \frac{2052}{27} - \frac{39}{\ln 10} = 76 - \frac{39}{\ln 10} \end{aligned}$$

III

$$f'(x) = \frac{4}{x \ln 10} \Rightarrow m = f'(10) = \frac{4}{10 \ln 10}$$

$$d: y - 4 = \frac{4}{10 \ln 10} (x - 10) \Rightarrow y = \frac{4}{10 \ln 10} x - \frac{4}{\ln 10} + 4 = d(x)$$

IV et V sur graphique

VI calculer l'abscisse de $K = d \cap g \Rightarrow x_K = a$

$$a_H = \int_a^1 (d(x) - p(x)) dx + \int_1^{10} (d(x) - f(x)) dx.$$

$K \in \mathbb{R}$

Exercice 3 (17 points)

Calculez et donnez les résultats sous la forme réduite :

1. $\int \frac{3}{5} (e^x)^4 dx = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} + K = \frac{3}{20} e^{4x} + K$

✓

2. $\int \frac{4x^7}{x^8-16} dx = \frac{1}{2} \ln(x^8-16) + K$

✓

3. $\int \pi x \cdot \sin x dx = \pi x \cdot (-\cos x) - \int \pi \cdot (-\cos x) dx =$
 $= -\pi x \cos x + \pi \sin x + K$

h

4. $\int e^x (3x^2 - x + 7) dx = e^x (3x^2 - x + 7) - \int e^x (6x - 1) dx =$
 $= e^x (3x^2 - x + 7) - \left[e^x (6x - 1) - \int 6e^x dx \right] =$
 $= e^x (3x^2 - x + 7 - 6x + 1 + 6) + K = e^x (3x^2 - 7x + 14) + K$

✓

5. $\int \frac{\pi \sin 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int \sin 2x dx =$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) + K =$

$= -\frac{\pi}{4} \cos 2x + K$

h