LJP: TE 19 _solutions

Lycée Jean-Piaget ESCN — 3M5

Mathématiques — TE n. 4

Nom : ....

Prénom : ....

tot. /42

Rédigez ce travail au stylo. La calculatrice est autorisée. Les détails de vos calculs sont exigés. Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

Exercice 1 (8 points)

Soit :

- ✓ F la fonction d'équation : $y = F(x) = (x^2 - 2) \cdot sinx + 2x \cdot cosx$;
- ✓ f la fonction d'équation : $y = f(x) = x^2 \cdot cosx$.

1. Vérifiez que F est bien une primitive de f. $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = 2x \cdot \cancel{\sin x} + (x^2-2)\cos x + 2\cos x - 2x\cancel{\sin x} = x^2\cos x = f(x)$$

ok!

4

2. Calculez l'aire du domaine fini compris entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \overset{1}{=} F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \quad 2$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 - \left[(0-2) \cdot 0 + 0\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

1

Exercice 2 (8 points)

Les graphes ci-contre représentent les fonctions f et g respectivement d'équation:

- ✓ $y = f(x) = sinx$;
- ✓ $y = g(x) = cosx$;

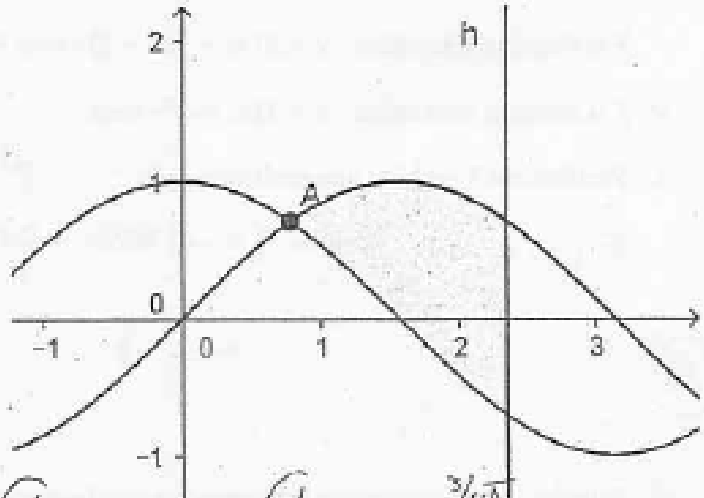
Et la droite h d'équation : $x = \frac{3}{4}\pi$.

Après avoir calculé l'abscisse du point A (valeur exacte), calculez l'aire exacte du domaine grisé.

A correspond à

$\sin x = \cos x$

donc $x = \pi/4$ 2



1 1 1

$$\text{Aire} = \int_{\pi/4}^{3/4\pi} (\sin x - \cos x)\, dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{3/4\pi} =$$

1

$$-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

1 1

$K \in \mathbb{R}$

Exercice 3 (14 points)

Calculez :

1. $\int -2\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int -2x^{2/3}\,dx = -2\,\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5/3} + K$

(2) $= -\frac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2} + K$

2. $\int \frac{3+5x-x^2}{x^2}\,dx = \int (3x^{-2} + 5x^{-1} - 1)\,dx = 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + 5\ln x - x + K$

(3) $= -\frac{3}{x} + 5\ln x - x + K$

3. $\int \frac{8}{7-8x}\,dx = -\int \frac{-8}{7-8x}\,dx = -\ln(7-8x) + K$

(3)

4. $\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx = -\int -\sin x\,(\cos x)^{1/2}\,dx = -\frac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x} + K$

(3)

(3) 5. $\int e^{3x^2+x}(6x+1)\,dx = e^{3x^2+x} + K$

Exercice 4 (12 points)

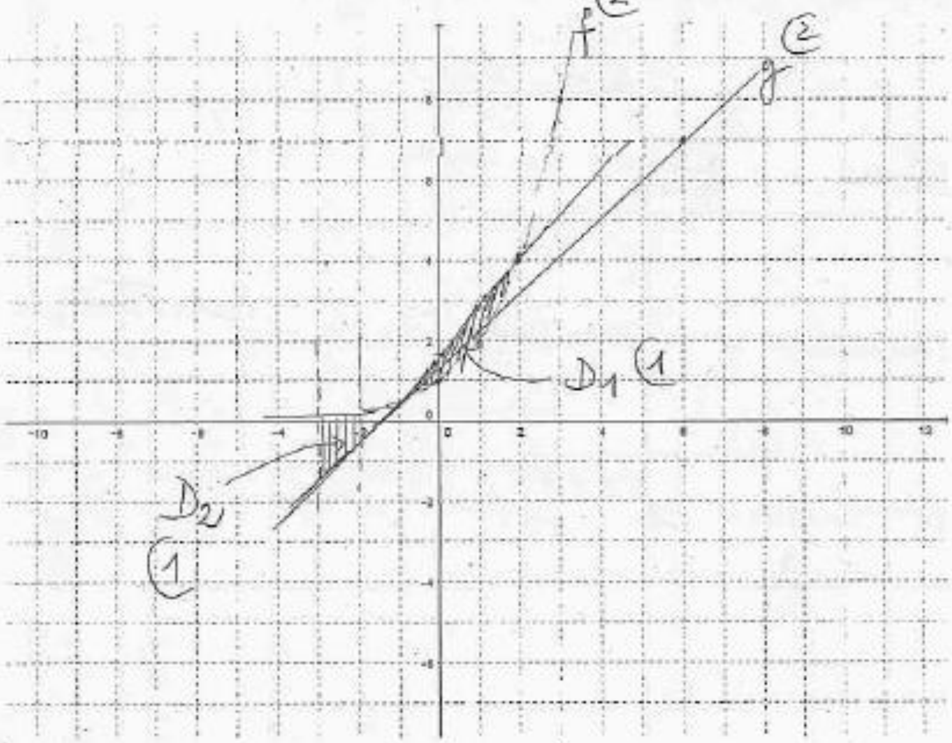
On donne la fonction f d'équation : $y = f(x) = 2^x$ et la fonction g d'équation : $y = g(x) = \frac{7}{6}x + \frac{5}{3}$.

A. Esquissez le graphe de f et de g.

B. Coloriez le domaine fini compris entre le graphe de f, de g et calculez-en l'aire exacte.

C. Faites de même pour le domaine compris entre le graphe de f, de g et les droites d'équation :

$x = -3$ et $x = -2$. 2



$x = -2 \Rightarrow g(-2) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = f(-1)$ 1

$f(2) = g(2) = 4$ 1 $\Rightarrow D_1 = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,dx =$

2

$= \left[\frac{7}{6}\frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^{2} = \frac{7}{3} + \frac{10}{3} - \frac{4}{\ln 2}$

$\cancel{\frac{7}{3}} + \cancel{\frac{10}{3}} - \frac{4}{\ln 2} - \frac{7}{12} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2\ln 2} =$

2

$= \frac{22}{\ldots} - \frac{7}{\ldots} + \frac{1-8}{\ldots} = \frac{88-7}{\ldots} - \frac{7}{2\ln 2} = \frac{81}{12} - \frac{7}{2\ln 2} = \frac{27}{4} - \frac{7}{2\ln 2}$.