

LDDR – Niveau 1: TE 18 – Analyse - Solutions

LDDR / Maths I

décembre 2017 (B)

TE 2 : Analyse I

Nom :

points	note

Exercice 1. [~20 minutes, 8 pts]

On considère l'expression $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$. $f'(x) = 4x + 3$

a) Trouver l'équation de la tangente à la parabole $y = f(x)$ en son point d'abscisse $a = 2$.

$$f(2) = 19, \quad f'(x) = 4x + 3 \quad \text{donc} \quad f'(2) = 11$$

$$t: y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2), \quad y = 19 + 11(x - 2), \quad y = 11x - 3$$

b) Trouver le point P de la parabole $y = f(x)$ en lequel la tangente est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x + 2$. $\leftarrow \text{pente} = 3$

$$f'(x) \cdot 3 = -1, \quad 12x + 9 = -1, \quad 12x = -10, \quad x = -\frac{5}{6}$$

$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{18} - \frac{5}{2} + 5 = \frac{35}{9} \quad \text{donc} \quad P\left(-\frac{5}{6}, \frac{35}{9}\right)$$

c) Trouver les valeurs de m de sorte que la droite $d: y = mx - 3m$ soit tangente à la parabole $y = f(x)$ et calculer le point de contact associée à l'une des droites trouvées.

$$2x^2 + 3x + 5 = mx - 3m, \quad 2x^2 + (3-m)x + (5+3m) = 0$$

L'équation doit avoir une seule solution x

$$\Delta(2; 3-m; 5+3m) = 0, \quad (3-m)^2 - 8(5+3m) = 0$$

$$9 - 6m + m^2 - 40 - 24m = 0, \quad m^2 - 30m - 31 = 0 \quad \text{à résoudre}$$

$$\Delta(1; -30; -31) = 900 - (-124) = 1024$$

$$m = \frac{30 \pm 32}{2} = \begin{cases} 31, & x = \frac{-3+m \pm \sqrt{1024}}{4} = 7, \quad P_1(7; 124) \\ -1, & x = \frac{-3+m \pm \sqrt{1024}}{4} = -1, \quad P_2(-1; 4) \end{cases}$$

Exercice 2. [~10 minutes, 2.5 pts]

Exprimer sans puissances négatives ou rationnelles la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 \sqrt[3]{x}}{x^5 \sqrt{x}}} = \left(\frac{x^4 x^{1/3}}{x^5 x^{1/2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{x^{13/3}}{x^{11/2}} \right)^{1/2} = (x^{-7/6})^{1/2} = x^{-7/12}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{12} x^{-19/12} = \frac{-7}{12 x^{19/12}} = \frac{-7}{12 \cdot \sqrt[12]{x^{19}}}$$

Exercice 3. [~30 minutes, 9.5 pts]

Calculer les dérivées suivantes (réponses simplifiées au maximum, factorisées si possible).

$$\begin{aligned} \text{a) } [(2x-3)^3(3x+2)^4]' &= 3(2x-3)^2 \cdot 2(3x+2)^4 + (2x-3)^3 \cdot 4(3x+2)^3 \cdot 3 \\ &= 6(2x-3)^2(3x+2)^3((3x+2) + 2(2x-3)) \\ &= 6(2x-3)^2(3x+2)^3(7x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } [x^2\sqrt{3x+2}]' &= 2x\sqrt{3x+2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3 = \frac{2x\sqrt{3x+2}}{1} + \frac{3x^2}{2\sqrt{3x+2}} \\ &= \frac{4x(3x+2) + 3x^2}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{15x^2 + 8x}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{x(15x+8)}{2\sqrt{3x+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left[\frac{(\cos x)^2}{\sin(x) + 3} \right]' &= \frac{2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot (\sin x + 3) - (\cos x)^2 \cdot \cos x}{(\sin x + 3)^2} \\ &= \frac{-\cos x (2(\sin x)^2 + 6\sin x + (\cos x)^2)}{(\sin x + 3)^2} \\ &= \frac{-\cos x ((\sin x)^2 + 6\sin x + 1)}{(\sin x + 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } [(3\cos(x) + 1)^2]' = 2(3\cos x + 1)(-3\sin x) = -6\sin x \cdot (3\cos x + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{e) } [(2\cos x)^2 + (2\sin x)^2]' &= [4(\cos x)^2 + 4(\sin x)^2]' = [4(\underbrace{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}_{=1})]' \\ &= [4]' = 0 \end{aligned}$$