EXERCICE 1

Cherchez une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x$	$f_2(x) = 4x$	$f_3(x) = x^2$
$f_4(x) = 5x^2$	$f_5(x) = x^3$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x^3$
$f_7(x) = x^5$	$f_8(x) = x^n; n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$f_9(x) = \frac{1}{x}$
$f_{10}(x) = 2e^x$	$f_{11}(x) = e^{2x}$	$f_{12}(x) = \sqrt{x}$
$f_{13}(x) = x^{-2}$	$f_{14}(x) = \frac{1}{x^3}$	$f_{15}(x) = \frac{4}{x^5}$

EXERCICE 2

Calculez les intégrales suivantes :

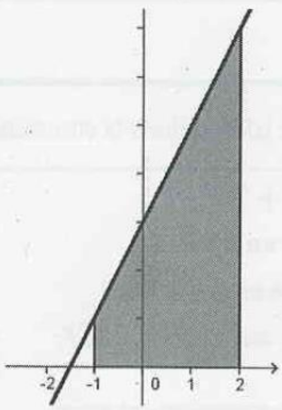
1. $\int \frac{x^3-3}{x^2} \mathrm{d}x$
2. $\int (e^x + 4x + \frac{1}{x})\, dx$
3. $\int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x^9}})\, dx$
4. $\int (x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + \frac{7}{x^6})\, dx$
5. $\int \frac{x^3+2x^5-9x^2}{x}\, dx$
6. $\int \frac{x^3+2x^5-9x^2}{4x^2}\, dx$
7. $\int \frac{x^3+2x^5-9x^2}{4x^{10}}\, dx$
8. $\int (ex - e^x + \frac{1}{2x})\, dx$
9. $\int (12 - \frac{3}{ln4}4^x + 2^x - \frac{3}{5^3})\, dx$

EXERCICE 3

Soit f une fonction dont une primitive est $F(x) = lnx - 3x^2 + 5x$.

Calculez l'aire exacte de la surface délimitée par : l'axe des abscisse, le graphe de f, les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 4



Voici une représentation graphique de la fonction affine :

$y = f(x) = 2x + 3$.

1. À l'aide de la géométrie élémentaire, déterminer l'aire de la surface grisée.
2. Trouver une primitive de $f(x)$.
3. Déterminer l'aire de la zone grisée à l'aide du calcul intégral :

$$S = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

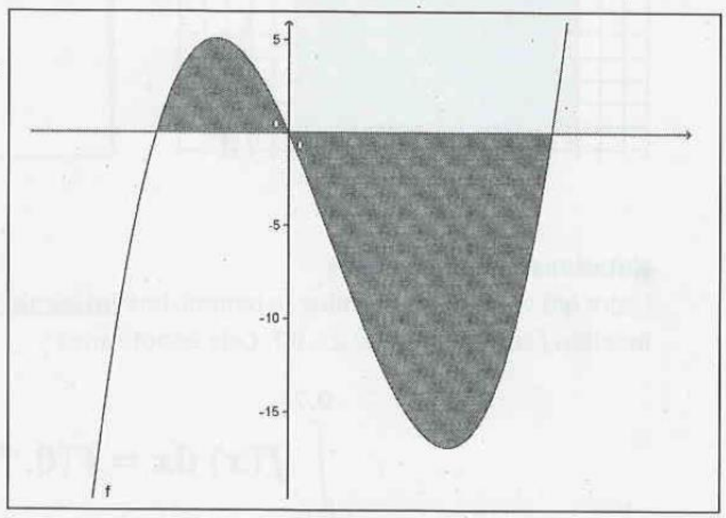
EXERCICE 5

Soit f la cubique d'expression analytique :

$y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

et dont graphe est représenté ci-contre.

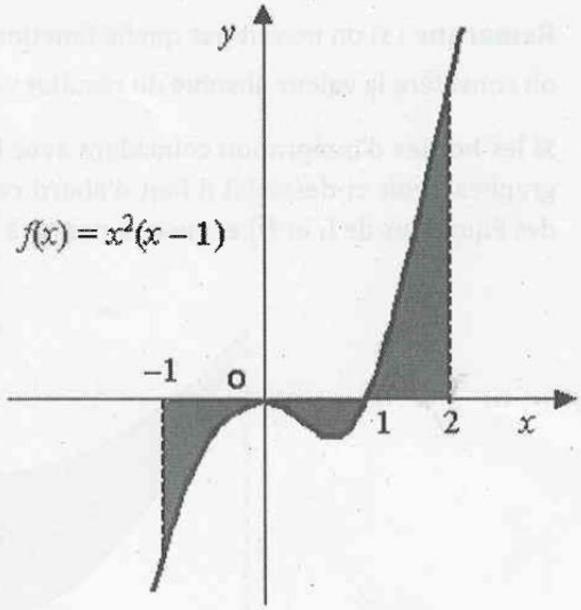
Calculez l'aire $\boldsymbol{A}$ de la surface grisée.



EXERCICE 6

Soit f la fonction représentée ci-contre.

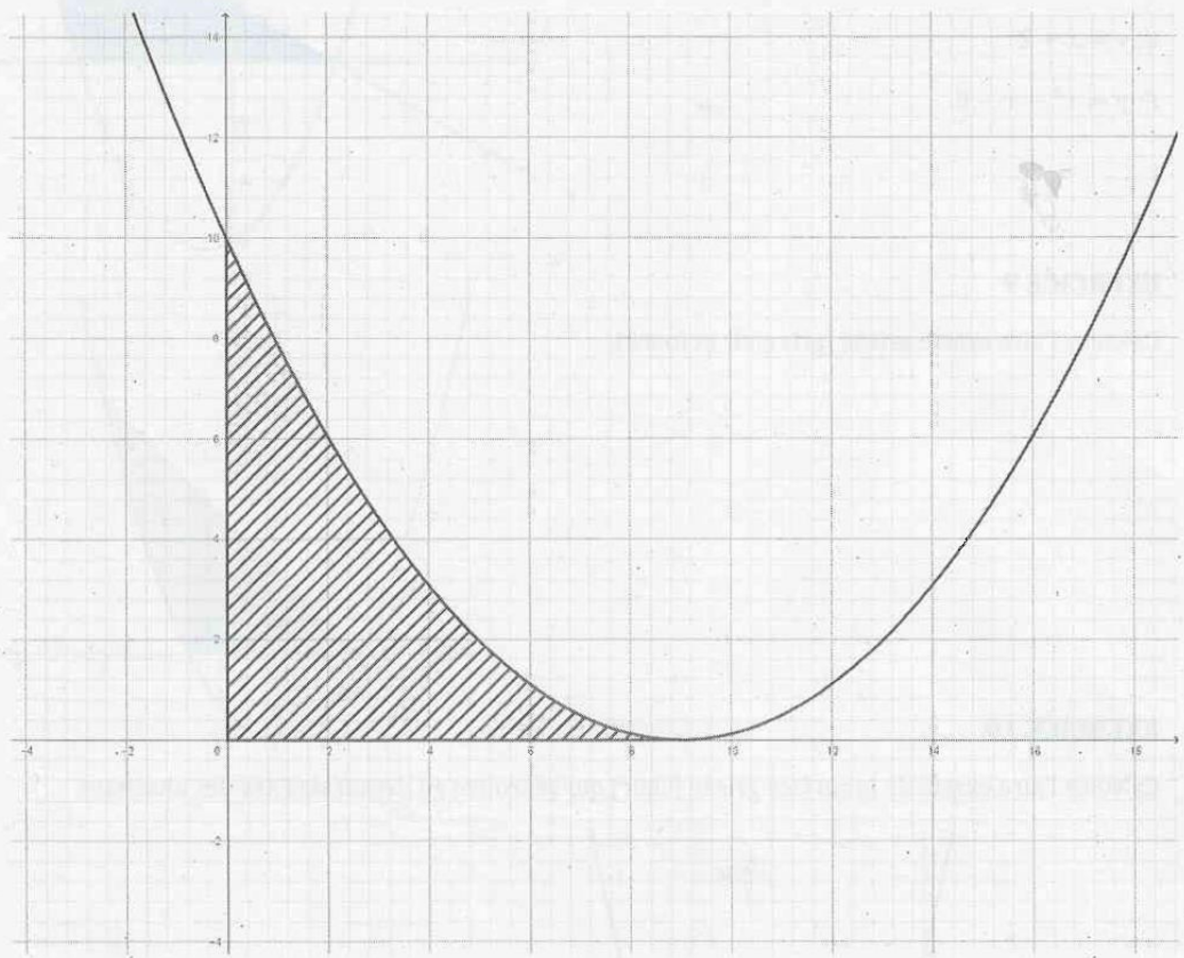
Calculez l'aire de la surface grisée.



EXERCICE 7

Considérez le graphe de la parabole P et la surface S traitillée. Calculez l'aire exacte de S.

Solution: $aire(S) = 30u^2$.



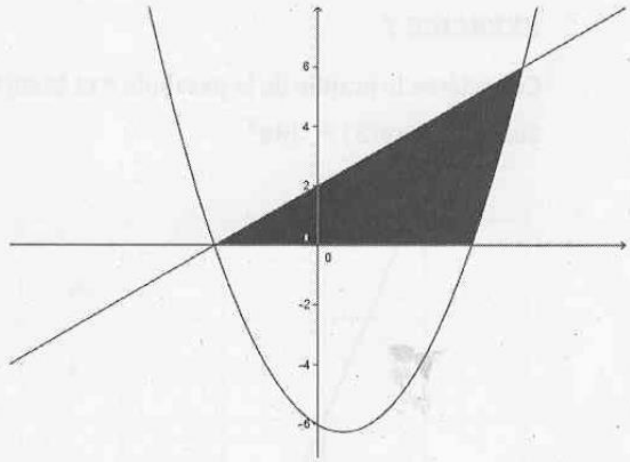
EXERCICE 8

Considérez le graphe de la droite d, de la parabole P et la surface S (grisée) comprise entre les deux.

Calculez l'aire exacte de S si:

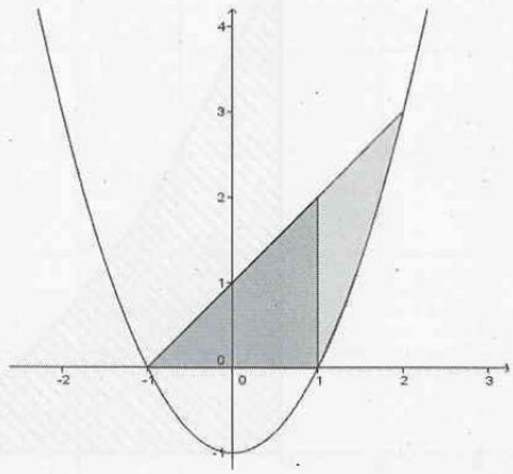
$d: y = x + 2$

$P: y = x^2 - x - 6.$



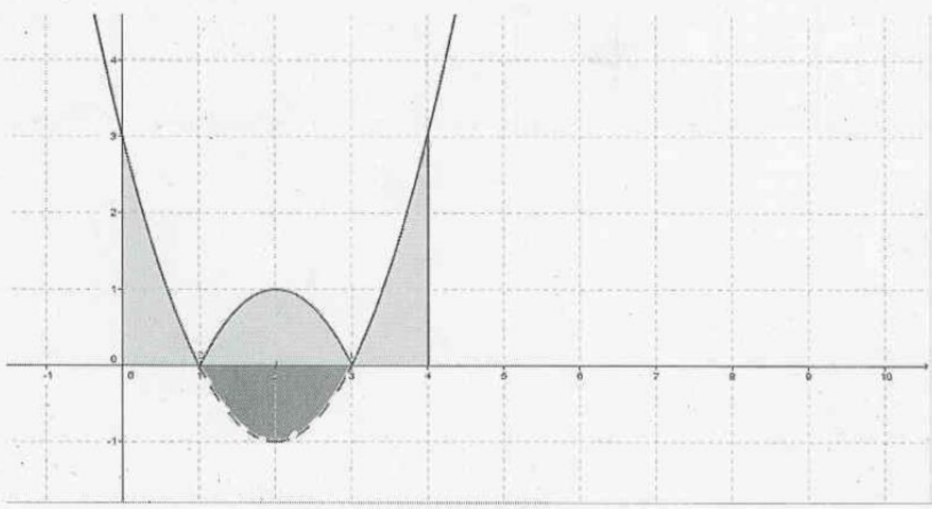
EXERCICE 9

Calculez l'aire exacte grisée (gris clair et foncé).

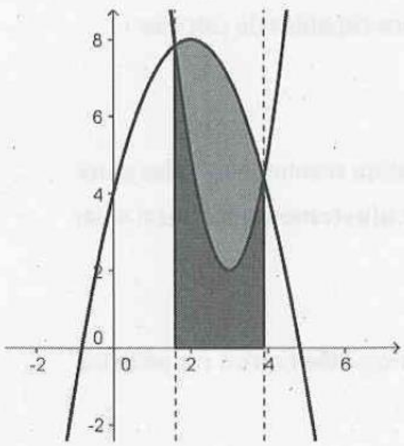


EXERCICE 10

Calculez l'aire exacte de la surface grisée (clair) qui se trouve au dessus de l'axe des abscisses.



EXERCICE 11



Voici une représentation graphique des paraboles d'équations $y = -x^2 + 4x + 4$ et $y = 3x^2 - 18x + 29$.

Déterminez **l'expression** permettant de calculer l'aire exacte de la surface de la zone représentée en gris foncé, puis celle de la zone représentée en gris clair.

EXERCICE 12

Considérez la fonction $f : y = e^x$ et la droite t tangente à son graphe en $P(e; \dots)$.

1. Esquissez, sur le même système d'axes, le graphe de f et de t.
2. Hachurez la zone comprise entre ces deux graphes et l'axe des ordonnées.
3. Calculez l'aire exacte de cette zone.

Solution : $aire = \left(e^e + \frac{1}{2}e^{e+2} - e^{e+1} - 1\right)u^2$.

EXERCICE 13

Calculez :

1. $\int \frac{1}{x+20} dx$ Sol : $\ln|x+20|+k$

2. $\int \frac{1}{3x+20} dx$ Sol : $\frac{1}{3}\ln|3x+20|+k$

3. $\int \frac{10}{3x+20} dx$ Sol : $\frac{10}{3}\ln|3x+20|+k$

4. $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}\, dx$

5. $\int \frac{3x}{3x^2+1} dx$

6. $\int \frac{17x^{16}}{7x^{17}-4} dx$

7. $\int \frac{1}{e^x} dx$

8. $\int \frac{1}{2^x} dx$

9. $\int 4x\sin(x^2+1)\, dx$

10. $\int x^4 e^{4x^5-13} dx$

11. $\int \frac{\pi x+2}{4x+\pi x^2} dx$

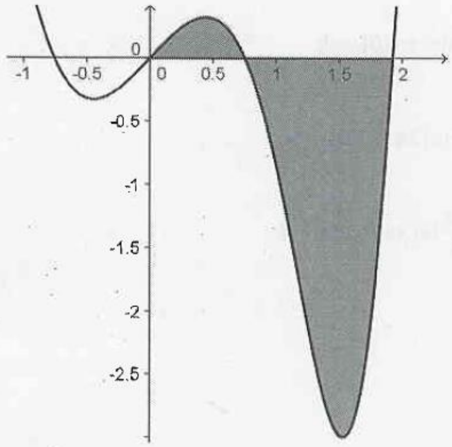
12. $\int 4x\cos(x^2+1)\, dx$

13. $\int (85x^4+e^x)cos(17x^5+e^x)\, dx$

14. $\int \tan(x)\, dx$ $N.B.: \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

EXERCICE 14

Voici un extrait du graphe de la fonction : $f(x) = 2x\cos(x^2+1)$.



(i) Calculez les abscisses des 4 zéros visibles sur ce dessin.

(ii) Vérifiez que $F(x) = \sin(x^2+1)$ est bien une primitive de $f(x)$.

(iii) Déterminez l'aire de la surface grisée.

EXERCICE 15

Technique à utiliser pour les exercices suivants.
Commencez par effectuer la division euclidienne afin de réécrire la fonction de la façon suivante :

$$\frac{dividende}{diviseur} = quotient + \frac{reste}{diviseur}$$

La partie *quotient* s'intégrera facilement (c'est un polynôme !) et la partie $\frac{reste}{diviseur}$ s'intègrera à l'aide des méthodes connues, moyennant un éventuel changement de variable du type $u = diviseur$.

1. $\int \frac{x-1}{x+1} \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{x+1}{x+2} dx$ Sol : $x - \ln(x+2) + k$
3. $\int \frac{2x+1}{x+1} dx$ Sol : $2x - \ln(x+1) + k$
4. $\int \frac{x^2-x+1}{x+1} dx$ Sol : $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln(x+1) + k$
5. $\int \frac{2x^4+1}{x-2} dx$ Sol : $\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 33\ln(x-2) + k$
6. $\int \frac{x^3}{2x+1} dx$ Sol : $\frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\ln(2x+1) + k$
7. $\int \frac{2x^3+4x+1}{2x+1} dx$ Sol : $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{5}{8}\ln(2x+1) + k$
8. $\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2} \mathrm{d}x$

EXERCICE 16

Calculez les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x \cdot e^x$
2. $f(\theta) = \theta \cdot e^{6\theta}$
3. $f(x) = (3x + 5) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
4. $f(w) = w^2 \cdot \sin(10w)$
5. $f(t) = t \cdot \sqrt{1 + t}$
6. $f(x) = x^5 \cdot \sqrt{x^3 + 1}$

Solutions : http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/IntegrationByParts.aspx

EXERCICE 17

Calculez la valeur exacte de : $\int_{-1}^{2} xe^{6x}dx$.

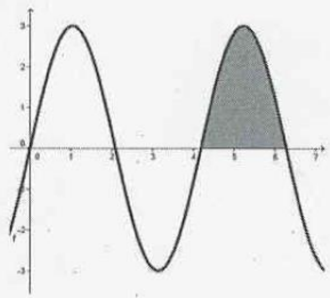
EXERCICE 18

Calculez les primitives des fonctions suivantes :

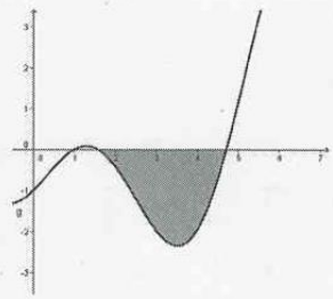
$f_1(x) = lnx$	$f_2(x) = (lnx)^2$	$f_3(x) = \ln(x^2)$
$f_4(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$	$f_5(x) = \dfrac{4x + 5}{x - 2}$	$f_6(x) = x\sqrt{3x - 1}$
$f_7(x) = (4x + 1)^3$	$f_8(x) = \dfrac{8x - 3}{3x - 4x^2 + 100}$	$f_9(x) = x^2(4x^3 + 1)^3$

EXERCICE 19

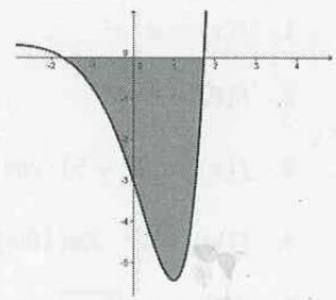
Déterminer l'aire des surfaces grisées :



$y = 3\sin(1.5x)$



$y = (x-1)\cos(x)$



$y = (x^2-3)e^x$

EXERCICE 20

Considérez les points A(0 ;1) ; B(1 :0) et les fonctions :

- ✓ $f: y = e^x$
- ✓ $g: y = lnx$
- ✓ $l: y = e$
- ✓ d, la droite reliant A et B.

1. Esquissez sur le même système d'axes le graphe de ces quatre fonctions.
2. Soit $K = g \cap l$. Calculez les coordonnées de K.
3. Hachurez la zone comprise entre les graphes.
4. Calculez l'aire de cette zone.

EXERCICE 21

Par la méthode d'identification des coefficients :

	Chercher une primitive de…	Sachant que la primitive est de la forme…
1.	$f(x) = (x^2 + x)e^x$	$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$
2.	$f(x) = (x^2 + 4)e^{-2x}$	$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
3.	$f(x) = (-4x + 2)\sin(2x)$	$F(x) = (ax + b)\sin(2x) + (cx + d)\cos(2x)$

EXERCICE 22

On considère la fonction d'équation $y = f(x) = e^{x/2}(x^2 - 2x - 3)$.

1. Étudier la fonction (zéros, comportement asymptotique, croissance et esquisse du graphe).
2. Vérifier que $\mathrm{F}(x) = 2e^{x/2}(x^2 - 6x + 9)$ est une primitive de $f(x)$.
3. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle [-1 ; 3].

EXERCICE 23

Soit la fonction $f(x) = e^{-x}(2x - 7)$:

1. Trouver les points d'intersection du graphe de f avec les axes, les coordonnées du point à tangente horizontale et dessiner le graphe.
2. Trouver une primitive de f.
3. Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphe de f, l'axe Ox et les deux verticales $x = 0$ et $x = 5$.
4. Calculer :

$$I(b) = \int_{\frac{7}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

où b est un nombre supérieur à $\frac{7}{2}$. Que se passe-t-il lorsque $b \longrightarrow +\infty$?

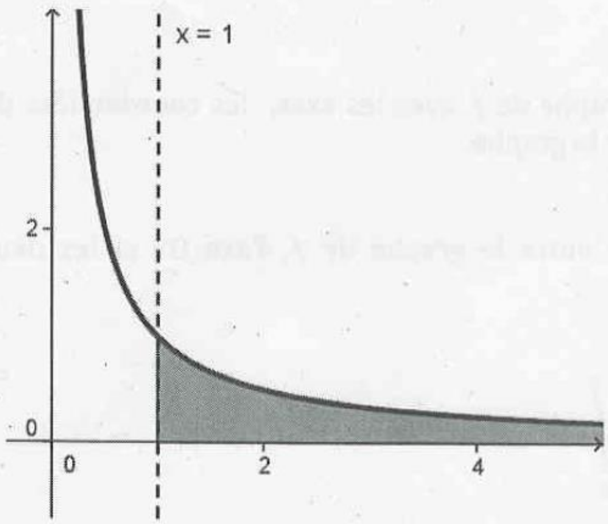
EXERCICE 24

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$:

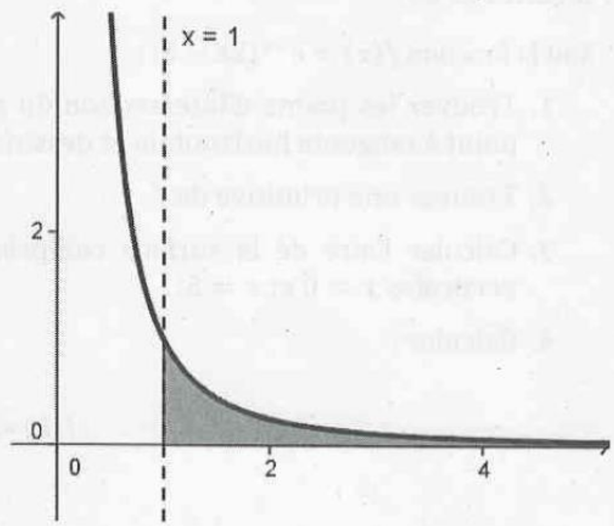
1. Trouver l'équation de la tangente au point P d'abscisse $x = 9$.
2. Dessiner le graphe de la fonction et la tangente en P.
3. Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f, la tangente en P et l'axe Ox.

EXERCICE 25

Considérez le graphe des fonctions f et g :



$$f(x) = y = \frac{1}{x}$$



$$g(x) = y = \frac{1}{x^2}$$

Complétez ce tableau :

Surface sous la courbe entre $x = 1$ et ...	$x = 2$	$x = 10$	$x = 100$	$x \to +\infty$
$f(x) = y = \frac{1}{x}$				
$g(x) = y = \frac{1}{x^2}$				

EXERCICE 26

Examen de maturité 2008 *(partie 2, l'exercice 3 était la partie 1 en version « light »)*

Considérez le graphe de la fonction f

d'équation :

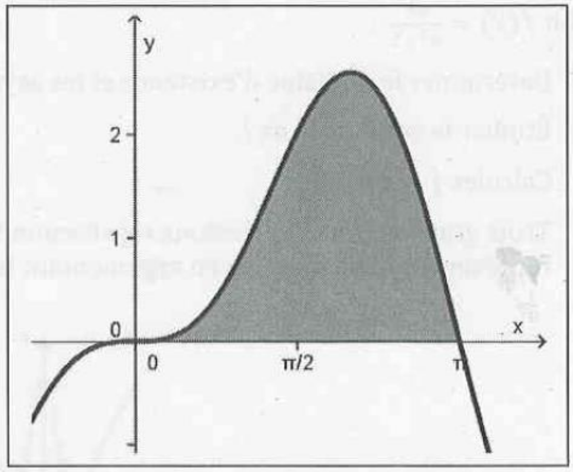
$f(x) = 2sin\, x - sin\, 2x$

et la surface grisée représentée ci-contre.

Calculez :

$\int_0^{\pi}(2\sin x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x.$

.

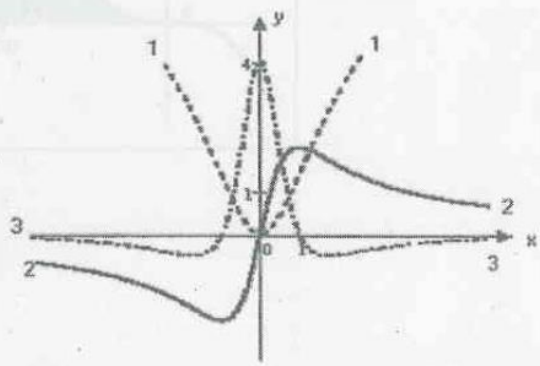


EXERCICE 27

Examen de maturité 2002

I. Soit $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$:

1. Déterminer le domaine d'existence et les asymptotes (avec le comportement) de f.
2. Étudier la croissance de f.
3. Calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Trois graphes tracés ci-dessous représentent f, f' et F (une primitive de f). Dire quel graphe représente quelle fonction en argumentant les choix.



II. Soit $g(x) = e^{1-2x}$:

1. Dessiner le graphe de g (sans étude).
2. Montrer que la fonction $S(a) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{1-2a}$ exprime l'aire de la surface entre le graphe de g, l'axe 0x, l'axe 0y et $x = a$ ($a > 0$).
3. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{a \to +\infty} S(a)$$

4. Trouver a pour que $S(a) = \frac{1}{4}e$.

EXERCICE 28

1. Donner l'équation du cercle de rayon 1 centré à l'origine.
2. En déduire l'expression fonctionnelle $y = f(x)$ du demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine d'ordonnée non négative.

Imaginons à présent que l'on plonge notre système d'axes dans un espace de dimension 3 et que l'on fasse tourner l'axe Ox : le demi-cercle tracera ainsi une sphère dans l'espace, et son volume se calculera de la façon suivante :

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

(cette formule n'est pas limité au cas du demi-cercle ; elle permet de calculer le volume d'un corps de révolution obtenu par rotation du graphe d'une fonction autour de l'axe des abscisses)

3. Calculer le volume de la sphère en question !

EXERCICE 29

Examen de maturité 2007

On considère la fonction $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ représentée graphiquement ci-dessous.

1. Établir le tableau de croissance de la fonction, et préciser les coordonnées des points à tangente horizontale.
2. Sur le graphe ci-dessous, graduer correctement les axes puis représenter graphiquement la fonction $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.
3. Calculer les coordonnées de A et B, les deux points d'intersection des deux graphes. Remarque : il est souhaité de calculer en valeurs exactes (exemple : ln(5) plutôt que 1,609....)
4. Hachurer la surface dont l'aire est donnée par :
5. $\int_0^{\ln(16)} \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$
6. Prouver que $\mathrm{F}(x) = (-2x^2 - 8x - 16)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de $f(x)$.
7. Calculer l'aire définie à la question d).
8. Montrer que la tangente au graphe de f en $x = 2$ passe par l'origine.