Chapitre 2 : Calcul intégral

Méthodes d'intégration

Exercice 1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes par la méthode directe :

1) $f(x)=5$ 2) $f(x)=-7x$ 3) $f(x)=x^2$ 4) $f(x)=-3x^2$	5) $f(x)=8x^3$ 6) $f(x)=-6x^3+7x^2-5x+2$ 7) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 8) $f(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{1}{3}x^2$

Exercice 2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes par la méthode d'ajustement :

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+5}}$ 2) $f(x)=e^{3x}$ 3) $f(x)=\frac{3}{3x-1}$ 4) $f(x)=-\frac{1}{2}e^{5x}$	5) $f(x)=\frac{1}{4-2x}$ 6) $f(x)=\cos(4x)$ 7) $f(x)=\sin(2x-1)$ 8) $f(x)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+3\sin(3x)$

Exercice 3 : Rechercher les intégrales indéfinies suivantes :

1) $\int x^2+3x-5\ dx$ 2) $\int 2x-1+\frac{1}{x^2}\ dx$ 3) $\int \frac{2}{x^4}\ dx$

4) $\int \frac{2}{3x}\ dx$ 5) $\int \sqrt{3x}\ dx$

Exercice 4 :

1) Trouver la primitive F de $f(x)=x$ si $F(2)=10$.

2) Trouver la primitive G de $g(x)=x^2-3$ si $G(1)=5$.

3) Trouver la primitive H de $h(x)=5-e^x$ si $H(-1)=-\frac{1}{e}$.

Exercice 5 : **Exercice supplémentaire :** Quelle est la primitive F(x) de $f(x)=\sin x+\cos x$ qui vérifie la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$?

Exercice 6 : A l'aide de l'intégration par parties, calculez : $\int (x+2)\cdot e^{x}\, dx$

Exercice 7 : Intégration par parties. Rechercher les intégrales suivantes:

a) Standard :	b) En deux coups :	c) Subtil :
1) $\int (2x+1)\sin(x)\, dx$	1) $\int x^{2}\cdot e^{x}\, dx$	1) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$
2) $\int (3-2x)\cdot e^{x}\, dx$	2) $\int x^{2}\cdot \sin(x)\, dx$	2) $\int e^{x}\cdot \sin(x) dx$
3) $\int x^{2}\cdot \ln(x)\, dx$	3) $\int x\cdot (\ln(x))^{2}\, dx$	

Exercice 8 : Exercice supplémentaire : Calculer les intégrales suivantes (diverses méthodes) :

1) $\int xe^{x-1}dx$

2) $\int e^{x}\cos x dx$

3) $\int \sin^{2} x dx$ Astuce !

4) $\int \frac{\ln x}{x^{2}} dx$

5) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

6) $\int 7\sin(3x)\, dx$

7) $\int x\sqrt{x}\, dx$

8) $\int (2x-1)^{2}\, dx$

9) $\int \frac{x}{e^{x}}\, dx$

10) $\int \frac{2x^{2}-4x+3}{4} dx$

Exercice 9 : INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLES

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int 2e^{\frac{x}{2}}dx$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}}$

2) $\int \frac{dx}{(2x+1)^{2}}$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

3) $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)dx$

6) $\int \mathrm{tg} x dx$

Exercice 10 : Considérer la fonction suivante :

$$f(x) = 2x\cos(x^2) - \frac{1}{x^2}$$

Voici trois propositions pour une primitive de f; déterminer laquelle est la bonne (en argumentant le choix effectué) :

$$F_1(x) = x^2\sin(x^2) + \frac{1}{x} \qquad F_2(x) = \sin(x^2) + \frac{1}{x} \qquad F_3(x) = \sin(x^2) - \frac{1}{x}$$

Exercice 11 : Soit $f(x) = \dfrac{6x^2 + 13x + 4}{3x - 2}$.

1) Trouver les 3 nombres réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{3x-2}$.

2) Trouver $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x - 2}\,dx$.

Exercice 12 :

1) Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

2) Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

3) Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$.

Exercice 13 : Considérons la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ et F la primitive de f sur $]-3;+\infty[$ qui s'annule en zéro.

1) Etudier les variations de la fonction F sur $]-3;+\infty[$.

2) Etudier le signe de $F(x)$ sur $]-3;+\infty[$.

3) Soit g la fonction définie par sur $]-3;+\infty[$ par $g(x) = F(x) - x$. Démontrer que g est décroissante sur $]-3;+\infty[$.

Exercice 14 : **Exercice supplémentaire :**

Chercher m et h afin que $\displaystyle\int (mx + h)e^x\,dx = (-7x + 5)e^x + C$.

Chercher a ; b et c afin que $\displaystyle\int (x^2 + 4)e^x\,dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$

Intégrales définies

Exercice 15 : Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $\int_{-2}^{3} 3x+1 \; dx =$

2) $\int_{-2}^{3} \frac{3}{x^3} \; dx =$

3) $\int_{0}^{2} (2-x)^3 \; dx =$

4) $\int_{0}^{2} e^{2x-1} \; dx =$

5) $\int_{1}^{5} \frac{3x^2-4x+1}{x} \; dx =$

Exercice 16 :

Résoudre par rapport à k : $\int_0^k (3x^2+2x)dx = 0$ Idem avec $\int_0^k (3x^2+2x)dx = 2$

Exercice 17 : **Exercice supplémentaire :**

Calculer les intégrales définies suivantes :

$\int_0^2 x\sqrt{x}dx$

$\int_1^e \frac{2+x}{x}dx$ (penser à décomposer la fraction)

$\int_{-1}^1 x\sqrt[3]{x}dx$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$

Exercice 18 : **Exercice supplémentaire :**

Résoudre l'équation $\int_1^t \frac{dx}{x+2} = 1$

Exercice 19 : Sachant que $\int_0^1 f(x)dx = 3$; $\int_1^2 f(x)dx = 4$ et $\int_2^3 f(x)dx = -8$, calculer

a. $\int_0^2 f(x)dx$
b. $\int_0^1 3f(x)dx$
c. $\int_0^3 8f(x)dx$
d. $\int_3^1 2f(x)dx$

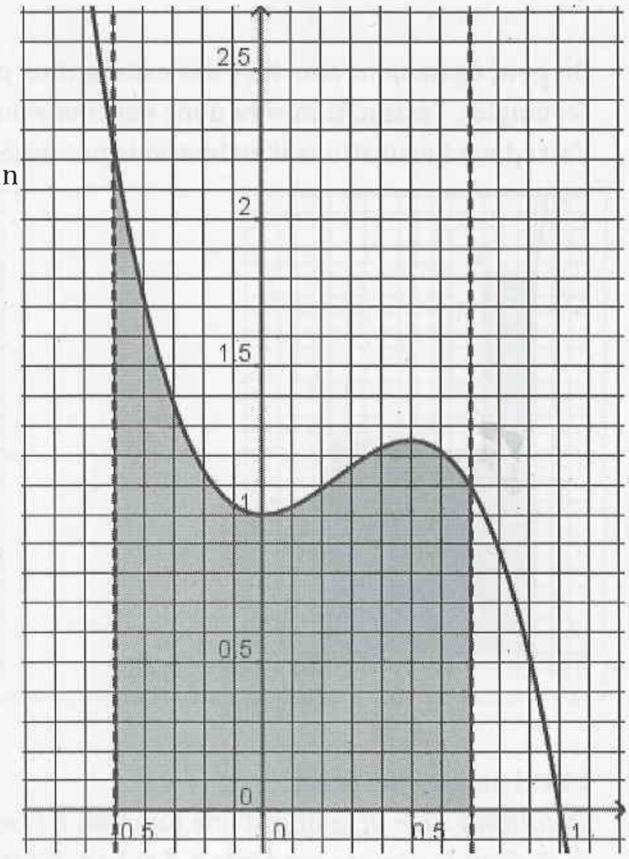
Exercice 20 : Montrer que pour une fonction continue sur [-a ;a], on a

1) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ lorsque f est paire.
2) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ lorsque f est impaire.

Exercice 21 : **Exercice supplémentaire :** Vérifier que $\frac{x}{x+1}$ et $-\frac{1}{1+x}$ sont des primitives de $\frac{1}{(x+1)^2}$. Calculer $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ à l'aide de ses deux primitives.

Exercice 22 :

Calcul d'aires



Première approximation

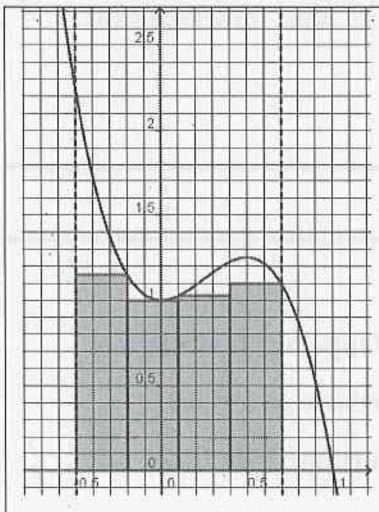
Comptons les carrés du mieux possible afin de déterminer cette surface :

Nombre de carrés entiers (ou recomposés) : ____

Surface approximative : ____________

Approximations plus fines

On peut décomposer la surface en petits rectangles : plus il y aura de rectangles, plus l'approximation sera précise. Voici deux exemples d'estimations *par défaut* (les rectangles sont placés sous la courbe, l'estimation sera donc forcément inférieure à la réalité).



4 rectangles d'une largeur de 0.3 :

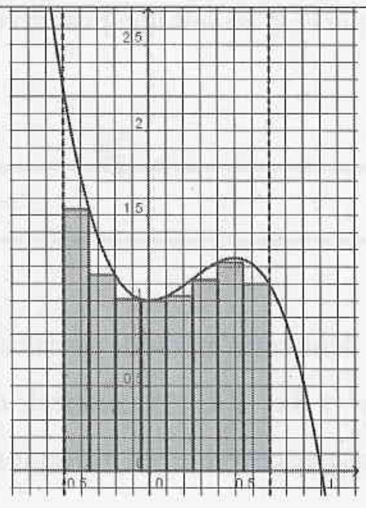
Rectangle 1 : __________

Rectangle 2 : __________

Rectangle 3 : __________

Rectangle 4 : __________

Surface totale : __________

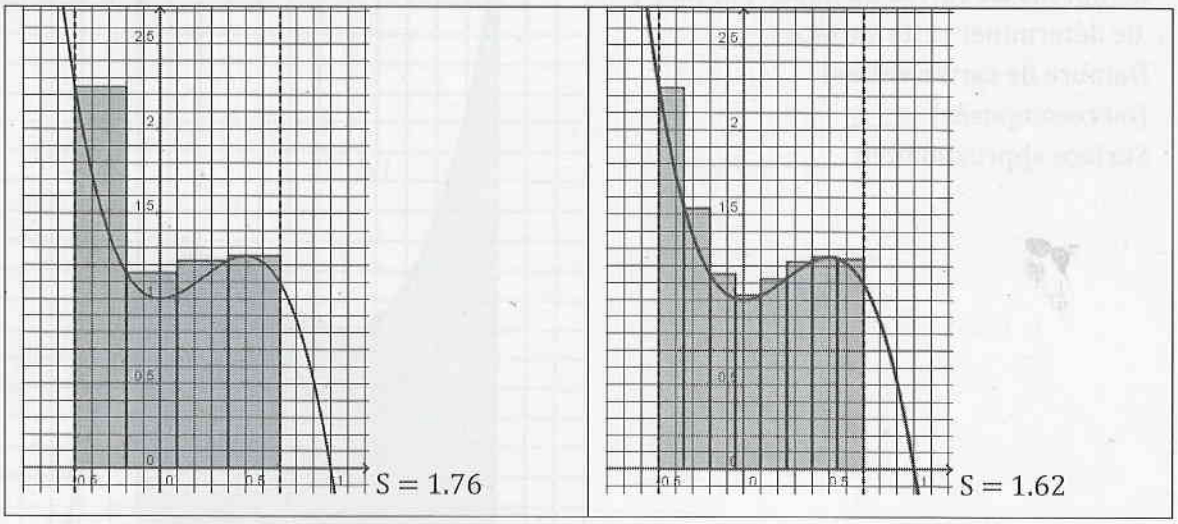


8 rectangles d'une largeur de 0.15 :

Rect. 1 :	_____	Rect. 5 :	_____
Rect. 2 :	_____	Rect. 6 :	_____
Rect. 3 :	_____	Rect. 7 :	_____
Rect. 4 :	_____	Rect. 8 :	_____

Surface totale : _____

On peut également effectuer des estimations *par excès* (la courbe est englobée dans les rectangles, l'estimation sera donc nécessairement supérieure à la surface recherchée). Voici deux illustrations d'estimations par excès, la surface est cette fois-ci déjà calculée :



Calcul numérique exact

Définition : une **primitive** d'une fonction $f(x)$ est une autre fonction, généralement notée $F(x)$, dont la dérivée est égale à $f(x)$ [*i.e.* $F'(x) = f(x)$].

Il se trouve qu'une primitive permet de calculer avec précision la surface comprise entre l'axe Ox, deux verticales et la courbe d'une fonction. En effet, en admettant que la première verticale soit en $x = a$, que la seconde verticale soit en $x = b$, que la fonction soit $f(x)$ et que $F(x)$ en soit une primitive, alors la surface S qui nous intéresse vaut exactement :

$$\boxed{S = F(b) - F(a)}$$

Appliquons donc cette méthode de calcul à notre exemple. Rappelons la situation :

$\boldsymbol{f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 1}$; 1ère verticale en $x = -0.5$; 2ème verticale en $x = 0.7$

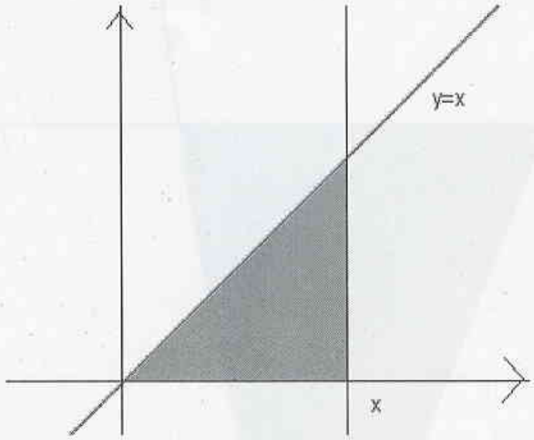
Commençons par chercher, en utilisant notre intuition, une primitive de f:

$F(x) =$ ____________________

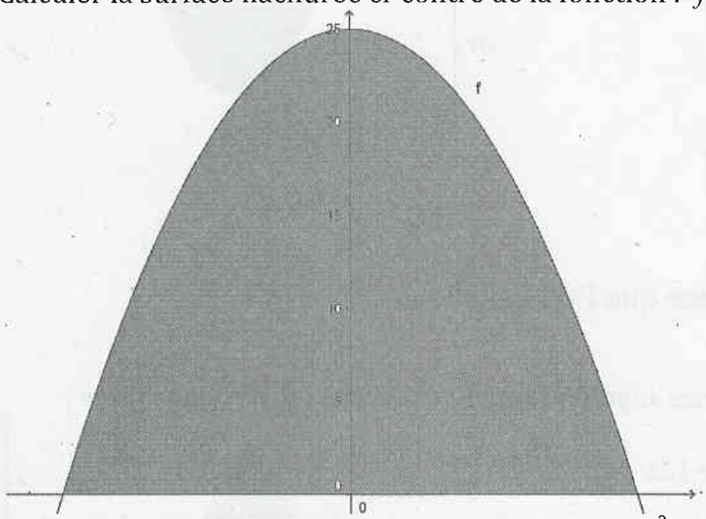
Puis calculons la surface (une fois la primitive déterminée, c'est un jeu d'enfant) :

$S = F(0.7) - F(-0.5) =$ ______________

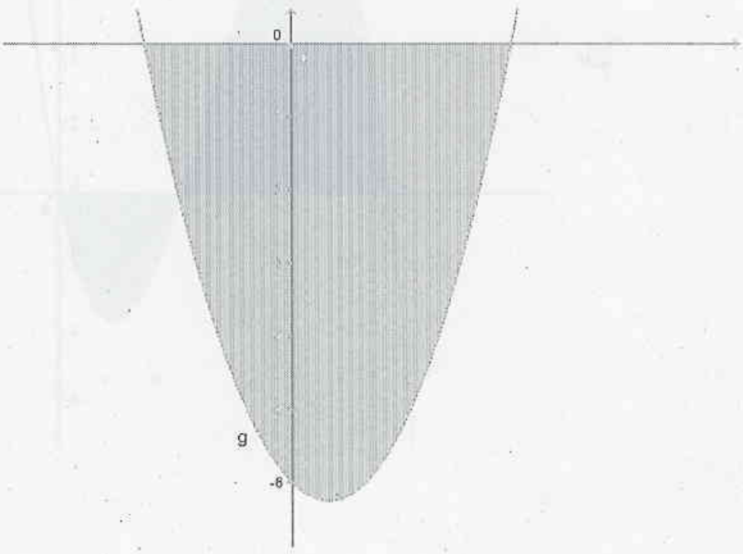
Exercice 23 : Calculer l'aire de la figure suivante de deux manières différentes



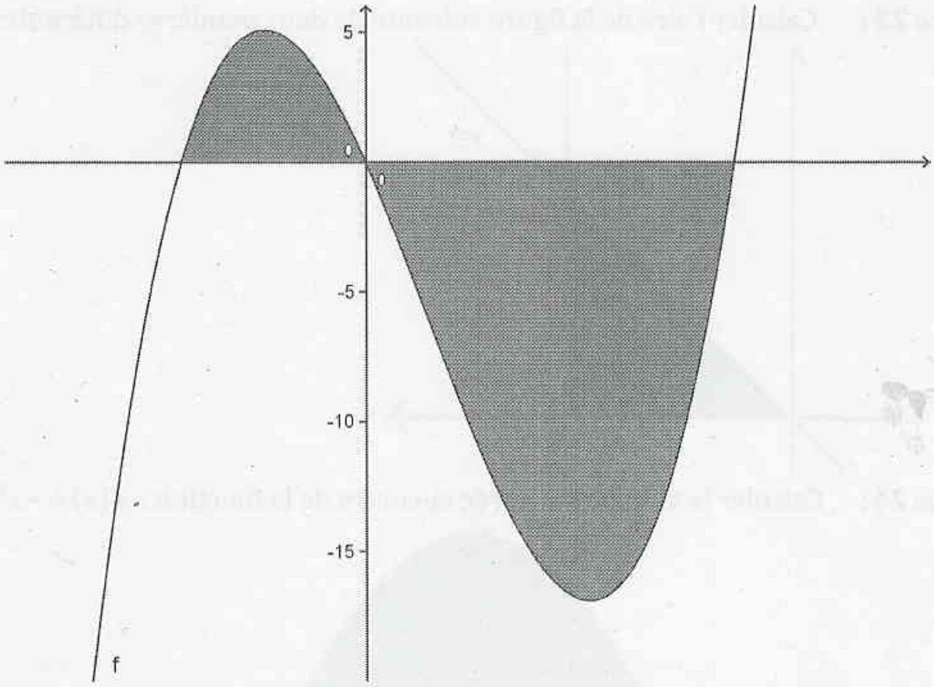
Exercice 24 : Calculer la surface hachurée ci-contre de la fonction : $f(x) = -x^2 + 25$



Exercice 25 : Calculer la surface hachurée de la fonction $f(x) = x^2 - x - 6$



Exercice 26 : On a $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$. Calculer la surface hachurée ci-contre

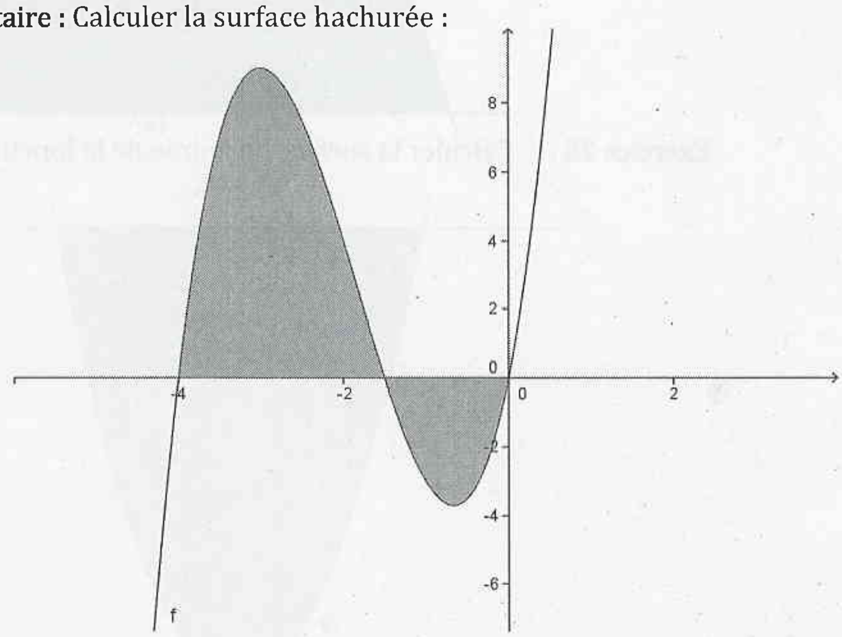


Exercice 27 :

Dessiner la surface que l'on calcule avec : $\int_{-1}^{1} (x+2)dx$

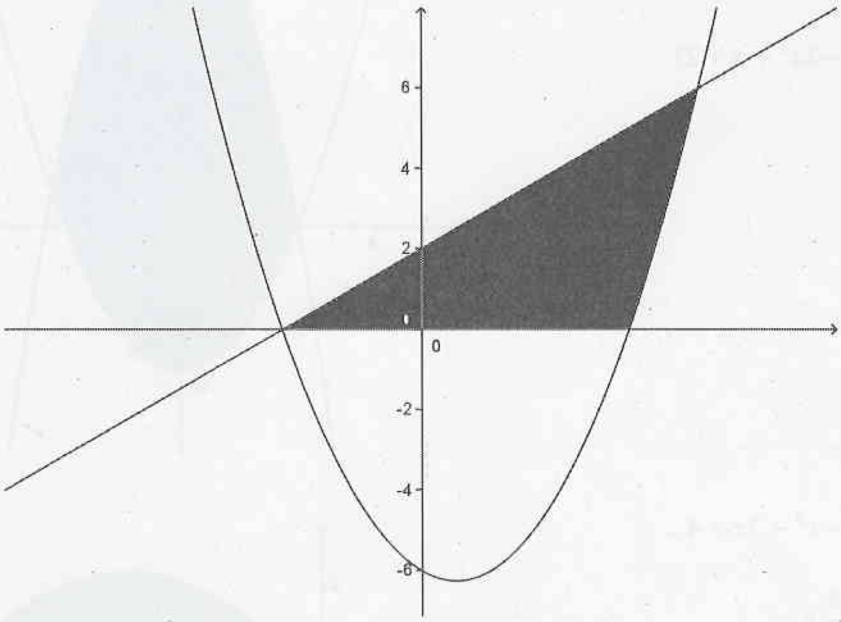
Exercice 28 : **Exercice supplémentaire :** Calculer la surface hachurée :

$f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 12x$



Exercice 29 : Considérons les fonctions $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2 - x - 6$.

Calculer la surface hachurée ci-contre.

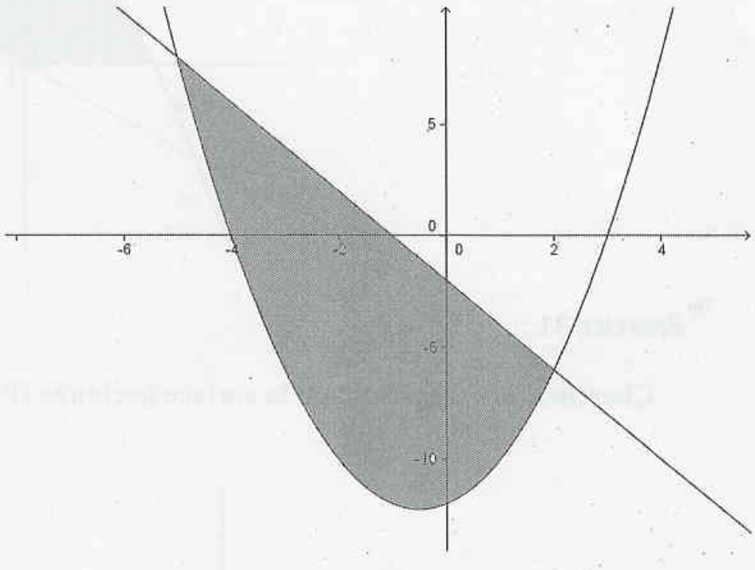


Exercice 30 : Calculer les surfaces hachurées :

1) $P : y = x^2 + x - 12$

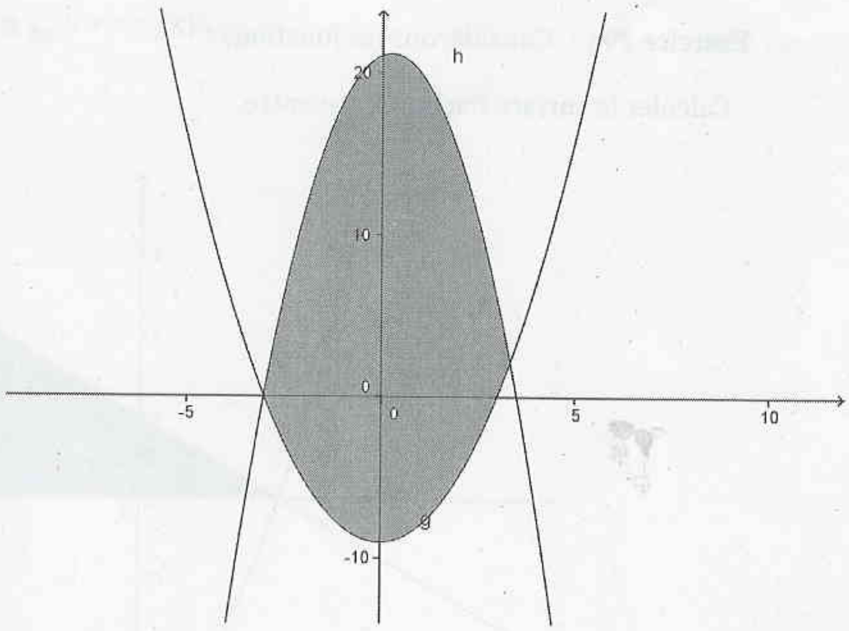
$d : y = -2x - 2$

Les bornes sont $a = -5$ *et* $b = 2$



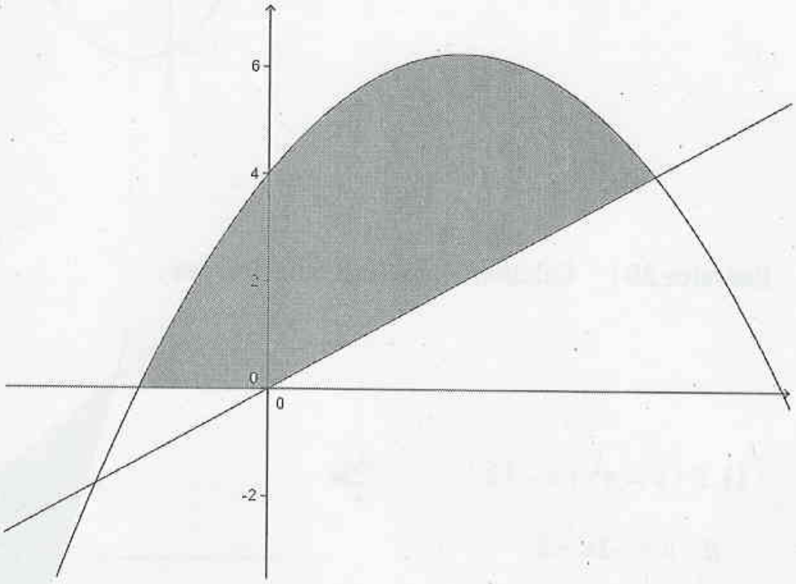
2) $P_1 : y = x^2 - 9$

$P_2 : y = -2x^2 + x + 21$



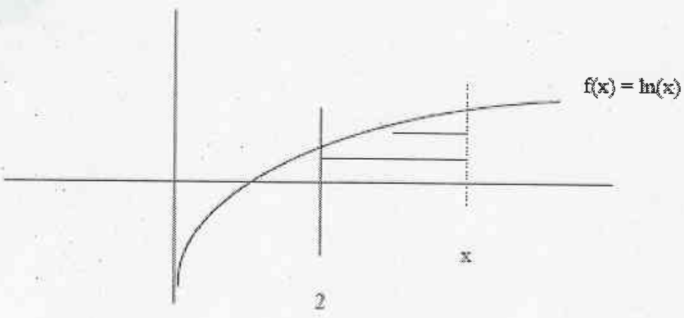
3) $P : y = -x^2 + 3x + 4$

$d : y = \frac{4}{3}x$

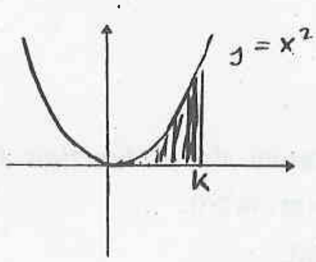


Exercice 31 :

Chercher S(x) représentant la surface hachurée (F&T est utile) :



Exercice 32 :



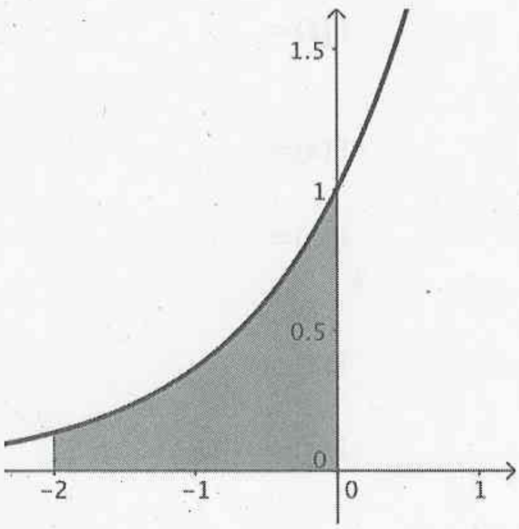
Calculer k si l'aire de la surface vaut 10.

Exercice 33 : **Exercice supplémentaire :** Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ si

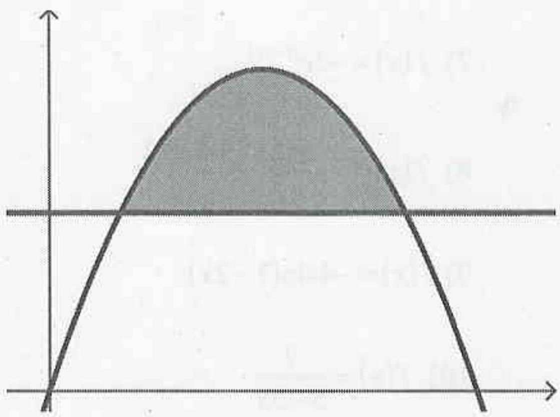
a. $f(x) = x^2 + 2 \quad a = -3, b = 3$
b. $f(x) = 9 - x^2 \quad a = -4, b = 4$
c. $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1 \quad a = 1, b = 4$
d. $f(x) = \cos(3x) \quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}$
e. $f(x) = \sqrt{2x - 4} \quad a = 2, b = 10$

Exercice 34 : **Exercice supplémentaire :** Calculer les surfaces grises :

1) $y = e^x$



2) $y = 5 \quad et \quad y = 6x - x^2$



Exercice 35 : Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume.

1) $f(x) = x + 1$ $\quad a = 1, b = 3$
2) $f(x) = mx$ $\quad a = 0, b = h$

Exercice 36 : Calculer l'aire du domaine limité par le graphe de la fonction f: $y = (x+1) \cdot e^{-x}$, l'axe des x et les deux droites $x = 0$ et $x = m$, $m > 0$.

Calculer ensuite la limite de cette aire lorsque m tend vers l'infini.

Exercices supplémentaires

Exercice 37 : Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1) $f(x) = 2x - 3$ F(x)=

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5x + 1$ F(x)=

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$ F(x)=

4) $f(x) = \frac{3}{x^3}$ F(x)=

5) $f(x) = \frac{2}{5x-1}$ F(x)=

6) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(2x-1)$ F(x)=

7) $f(x) = -2e^{(1-2x)}$ F(x)=

8) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2}$ F(x)=

9) $f(x) = -4\sin(3-2x)$ F(x)=

10) $f(x) = \frac{7}{5-3x}$ F(x)=

Exercice 38 :

a) Ecrire en symboles mathématiques : « la fonction g est primitive de la fonction p »
b) De quelle fonction $y = x^3 - 5x$ est-elle une primitive ?
c) Donner une primitive de $y = (x+1)^2$.
d) Si F_1 et F_2 sont primitives de la fonction f , alors que peut-on dire de $F_1 - F_2$?
e) Proposer une fonction primitive d'elle-même.
f) Quelle différence essentielle faites-vous entre une intégrale définie et une intégrale indéfinie ?
g) $\int sidi = ?$
h) $\int \frac{1}{x} dx = ?$

Exercice 39 :

a) Justifier la propriété suivante : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
b) $\int_\pi^\pi g(x)dx = ?$
c) Poser le calcul (avec une $\int$) qui permettra le calcul de la surface du triangle délimité par $y = \sqrt{2}\,x$, $x = \sqrt{3}$ et Ox.
d) Sans faire de calculs, expliquer pourquoi le nombre $\int_1^2 (1-x^2)dx$ est négatif.
e) $\int_0^1 dx = ?$
f) $\int_{-1}^1 x^3 dx = ?$
g) Dessiner la figure dont la surface est calculée avec $\int_0^1 \cos(x)dx = ?$
h) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x}dx$ n'a pas de signification, pourquoi ?

Exercice 40 :
On donne les fonctions f et g. Calculer l'aire du domaine borné et limité par les graphes des deux fonctions.

a. $f: x \mapsto x^2$ $\qquad g: x \longmapsto 8 - x^2$
b. $f: x \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x$ $\qquad g: x \longmapsto x^3 - 7x^2 + 12x$